



POLITECNICO
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Fondamenti di robotica

Generazione delle traiettorie

28.03.2026 | Paolo Rocco

Contenuti

1. Introduzione
2. Traiettorie polinomiali
3. Profilo di velocità trapezoidale
4. Traiettorie nello spazio operativo
5. Cinematica inversa

Introduzione

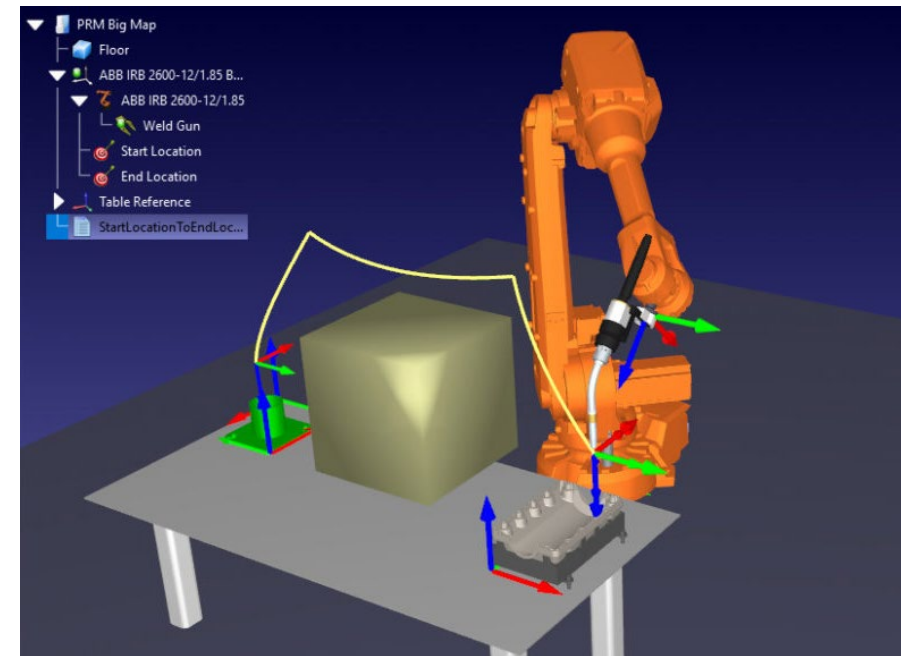
01

Generazione delle traiettorie

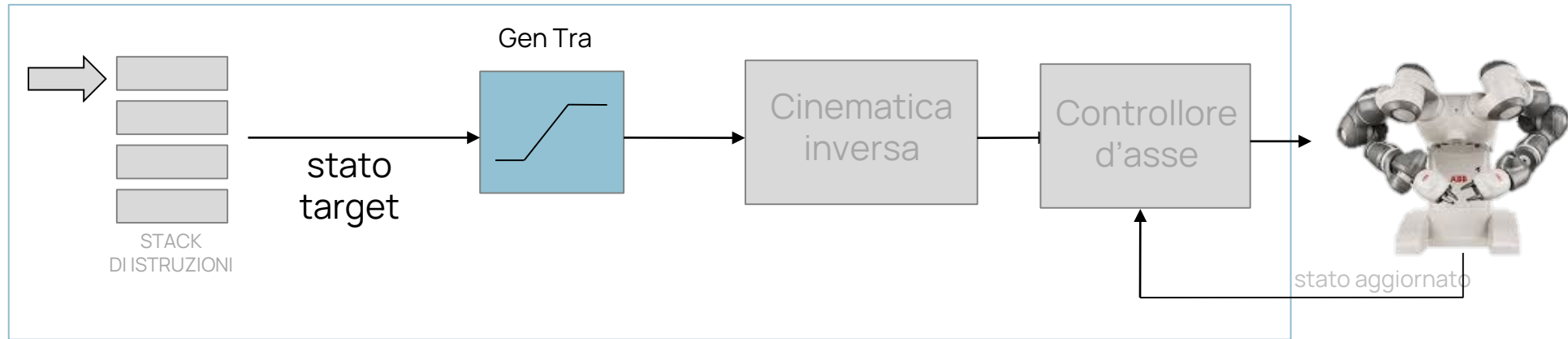
Una volta che la sequenza delle istruzioni di movimento è stata predisposta occorre generare istante per istante la traiettoria.

Occorre quindi definire istante per istante (con un opportuno tempo di campionamento) come deve evolvere il moto del robot in modo da raggiungere la configurazione finale prevista dall'istruzione di movimento.

A seconda del comando di moto impartito, la **generazione delle traiettorie** può avvenire nello spazio dei giunti o nello spazio operativo.



Elementi di un sistema di pianificazione e controllo del movimento



- **Stack di istruzioni:** elenco di istruzioni da eseguire, specificato utilizzando il linguaggio di programmazione proprietario
- **Generazione traiettoria:** converte un'istruzione in una traiettoria da eseguire
- **Cinematica inversa:** mappa la traiettoria dallo spazio cartesiano allo spazio dei giunti (se necessario)
- **Controllore d'asse:** chiude l'anello di controllo garantendo prestazioni di inseguimento

Ingressi e uscite di un pianificatore di traiettorie

Come abbiamo visto, in generale l'utente quando assegna un comando di movimento specifica un numero limitato di parametri come **input**:

- Spazio di definizione: spazio dei giunti o spazio cartesiano
- Per il **percorso geometrico**: punti finali, possibili punti intermedi, geometria del tracciato (segmento, arco circolare, ecc.)
- Per la **legge oraria**: nulla o informazioni sintetiche sulla velocità e accelerazione

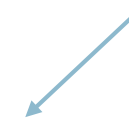
Sulla base di queste informazioni il pianificatore della traiettoria genera una **sequenza densa di punti intermedi** nello spazio rilevante (spazio dei giunti o spazio Cartesiano) a un passo fisso (ad esempio 10 ms). In caso di traiettorie nello spazio Cartesiano questi punti vengono ulteriormente convertiti in punti nello spazio dei giunti attraverso l'inversione cinematica.

Criteri per la selezione della traiettoria

Alcuni criteri per la selezione delle traiettorie potrebbero essere:

- efficienza computazionale e spazio di memoria
- continuità di posizioni, velocità (ed eventualmente di accelerazioni e jerk)
- minimizzazione degli effetti indesiderati (oscillazioni, curvatura irregolare)
- precisione (nessuna sovra-elongazione nel posizionamento finale)

derivata dell'accelerazione



Traiettorie nello spazio dei giunti

Quando pianifichiamo la traiettoria nello spazio dei giunti vogliamo generare una funzione $q(t)$ che definisce come ciascuna variabile di giunto deve evolvere dal valore iniziale a quello finale.

È quindi sufficiente operare componente per componente (cioè considerare una singola variabile di giunto $q_i(t)$): in quanto segue prenderemo in considerazione quindi la generazione di una **singola coordinata scalare**.

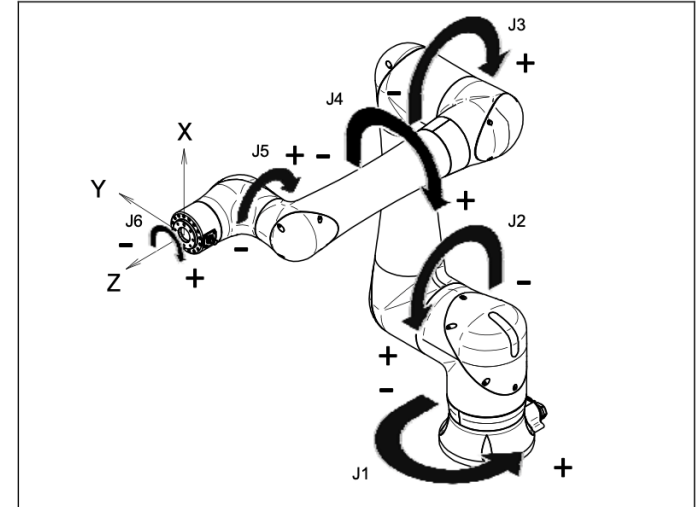


Fig. 3.1 (b) Each axes coordinates and mechanical interface coordinates

Quando si pianifica nello spazio dei giunti, la definizione del percorso come entità geometrica non è rilevante, poiché non siamo interessati a un movimento coordinato dei giunti (se non per il fatto che tutti i giunti completino il loro movimento nello stesso istante).

Traiettorie polinomiali

02

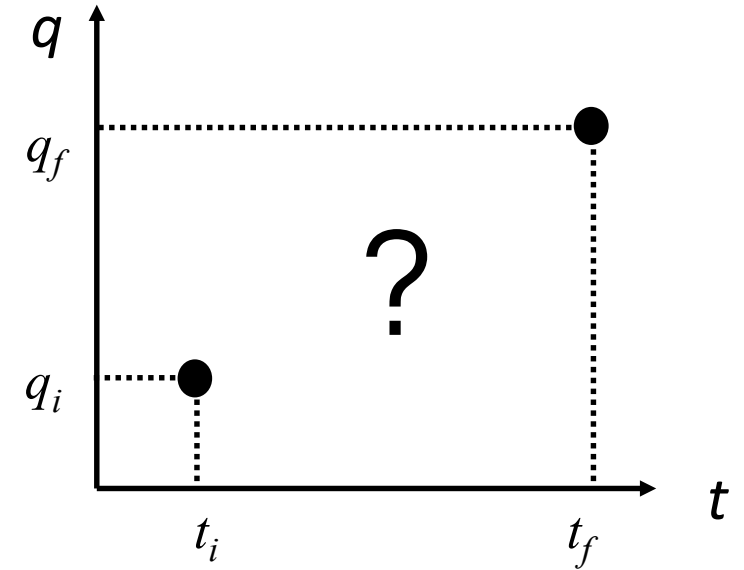
Traiettorie polinomiali

Il caso più semplice di pianificazione della traiettoria per il movimento **punto a punto** è quando sono assegnate condizioni iniziali e finali su posizioni, velocità ed eventualmente su accelerazione e jerk e il tempo di posizionamento.

Possono essere considerate le **funzioni polinomiali**:

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$$

Maggiore è il grado n del polinomio, maggiore è il numero di condizioni al contorno che possono essere soddisfatte e più fluida sarà la traiettoria.



Polinomi cubici

Si supponga che siano assegnate le seguenti condizioni al contorno:

- istante iniziale e finale t_i e t_f
- posizione e velocità iniziali q_i e \dot{q}_i
- posizione e velocità finali q_f e \dot{q}_f

Abbiamo quindi quattro condizioni al contorno. Per soddisfarle abbiamo bisogno di un polinomio di ordine almeno uguale a 3 (**polinomio cubico**) che possiamo scrivere in questi termini:

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_i) + a_2(t - t_i)^2 + a_3(t - t_i)^3$$

Se imponiamo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} q(t_i) &= q_i \\ \dot{q}(t_i) &= \dot{q}_i \\ q(t_f) &= q_f \\ \dot{q}(t_f) &= \dot{q}_f \end{aligned}$$

otteniamo:

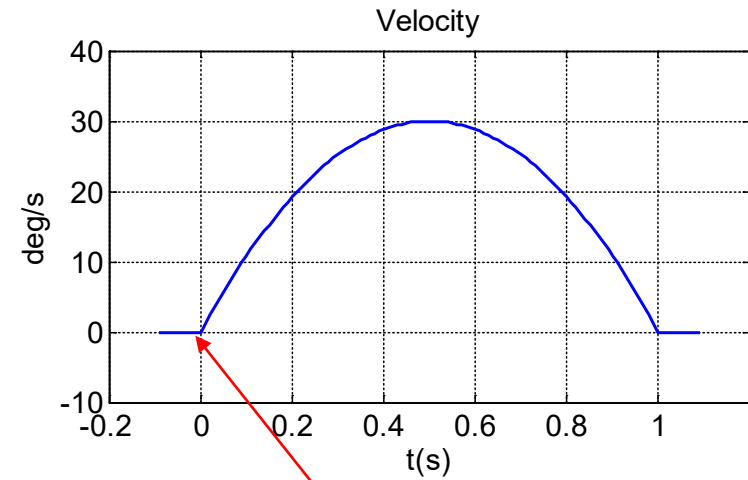
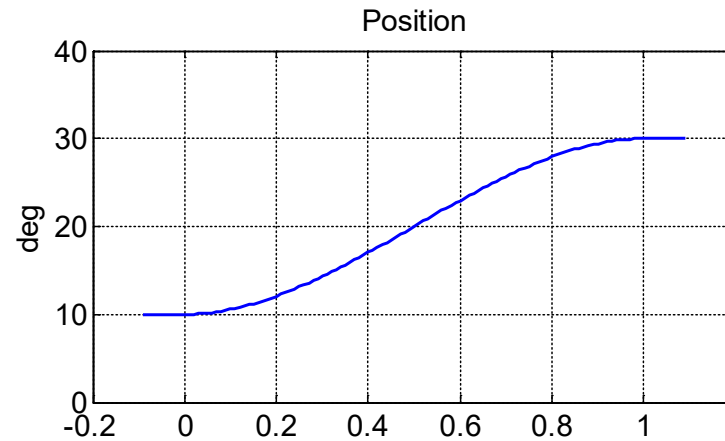
$$\begin{aligned} a_0 &= q_i \\ a_1 &= \dot{q}_i \\ a_2 &= \frac{-3(q_i - q_f) - (2\dot{q}_i + \dot{q}_f)T}{T^2} \\ a_3 &= \frac{2(q_i - q_f) + (\dot{q}_i + \dot{q}_f)T}{T^3} \end{aligned} \quad T = t_f - t_i$$

Polinomi cubici: esempio

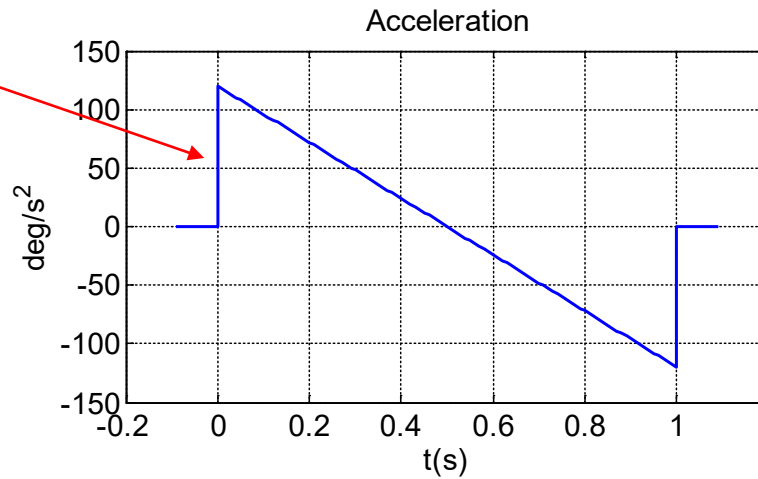
$$t_i = 0, t_f = 1 \text{ s},$$

$$q_i = 10^\circ, q_f = 30^\circ,$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_f = 0^\circ/\text{s}$$



discontinuità



punto angoloso

Polinomi di grado cinque

Per assegnare condizioni anche sulle accelerazioni, dobbiamo considerare **polinomi di grado 5**:

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_i) + a_2(t - t_i)^2 + a_3(t - t_i)^3 + a_4(t - t_i)^4 + a_5(t - t_i)^5$$

Imponendo le condizioni al contorno:

$$q(t_i) = q_i \quad q(t_f) = q_f$$

$$\dot{q}(t_i) = \dot{q}_i \quad \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f$$

$$\ddot{q}(t_i) = \ddot{q}_i \quad \ddot{q}(t_f) = \ddot{q}_f$$

otteniamo:

$$a_0 = q_i$$

$$a_1 = \dot{q}_i$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \ddot{q}_i$$

$$a_3 = \frac{20(q_f - q_i) - (8\dot{q}_f + 12\dot{q}_i)T - (3\ddot{q}_f - \ddot{q}_i)T^2}{2T^3}$$

$$a_4 = \frac{30(q_i - q_f) + (14\dot{q}_f + 16\dot{q}_i)T + (3\ddot{q}_f - 2\ddot{q}_i)T^2}{2T^4}$$

$$a_5 = \frac{12(q_f - q_i) - 6(\dot{q}_f + \dot{q}_i)T - (\ddot{q}_f - \ddot{q}_i)T^2}{2T^5}$$

$$T = t_f - t_i$$

Polinomi di grado cinque: esempio

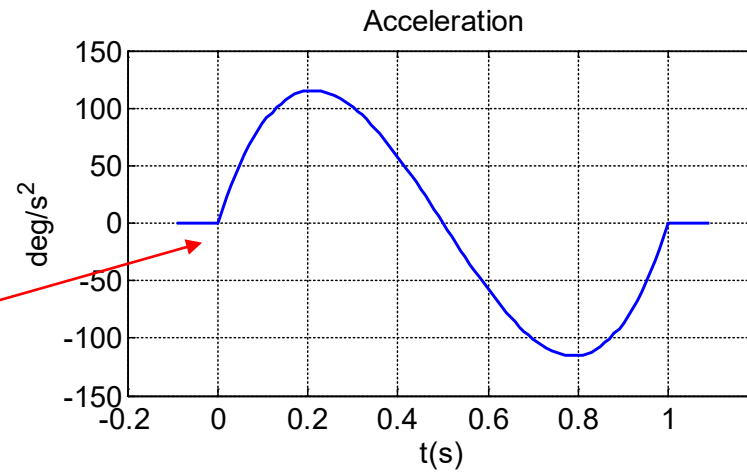
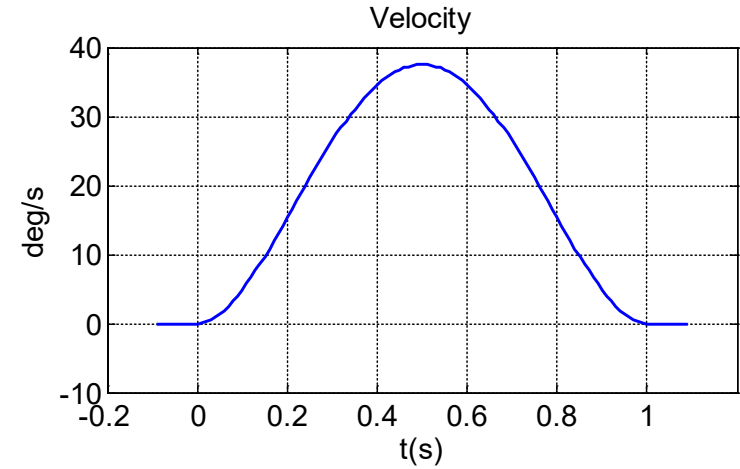
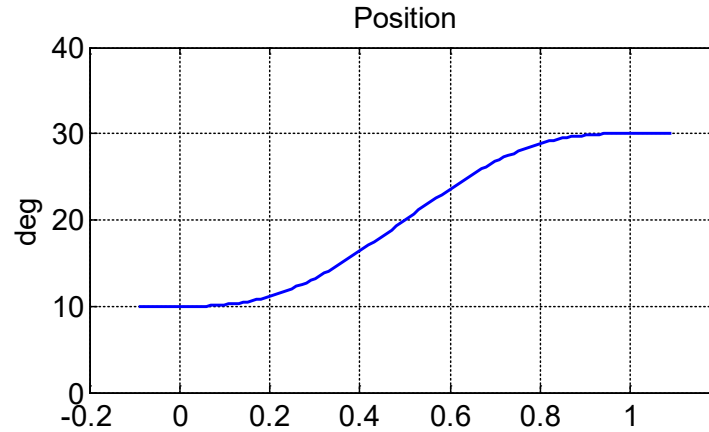
$$t_i = 0, t_f = 1 \text{ s},$$

$$q_i = 10^\circ, q_f = 30^\circ,$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_f = 0,$$

$$\ddot{q}_i = \ddot{q}_f = 0$$

punto angoloso
(jerk
discontinuo)



Profilo di velocità trapezoidale

03

Profilo di velocità trapezoidale

Nei profili polinomiali di grado tre e cinque i massimi valori della velocità e dell'accelerazione vengono raggiunti in istanti isolati. Il sistema di attuazione del moto non viene quindi utilizzato al meglio.

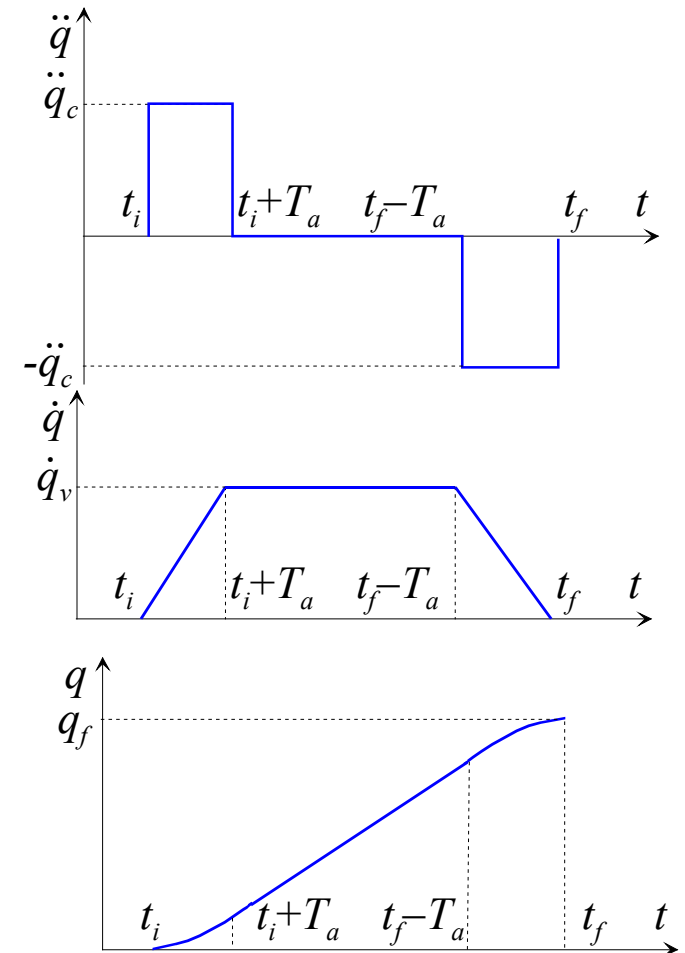
Un'alternativa è cercare di mantenere tali valori massimi per interi intervalli. Si può a questo fine usare il **profilo di velocità trapezoidale**.

La traiettoria è composta da **tre parti**:

1. Accelerazione costante, velocità lineare, posizione parabolica;
2. Accelerazione zero, velocità costante, posizione lineare;
3. Decelerazione costante, velocità lineare, posizione parabolica.

La durata T_a della fase di accelerazione (fase 1) è impostata uguale alla durata della fase di decelerazione (fase 3): in questo modo si ottiene una traiettoria, simmetrica rispetto all'istante medio del tempo. Naturalmente deve essere

$$T_a \leq (t_f - t_i)/2$$



Profilo di velocità trapezoidale: equazioni

Parte 1:

$$t \in [t_i, t_i + T_a]$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{\dot{q}_v}{T_a}$$

$$\dot{q}(t) = \frac{\dot{q}_v}{T_a} (t - t_i)$$

$$q(t) = q_i + \frac{\dot{q}_v}{2T_a} (t - t_i)^2$$

Parte 2:

$$t \in [t_i + T_a, t_f - T_a]$$

$$\ddot{q}(t) = 0$$

$$\dot{q}(t) = \dot{q}_v$$

$$q(t) = q_i + \dot{q}_v \left(t - t_i - \frac{T_a}{2} \right)$$

Parte 3:

$$t \in [t_f - T_a, t_f]$$

$$\ddot{q}(t) = -\frac{\dot{q}_v}{T_a}$$

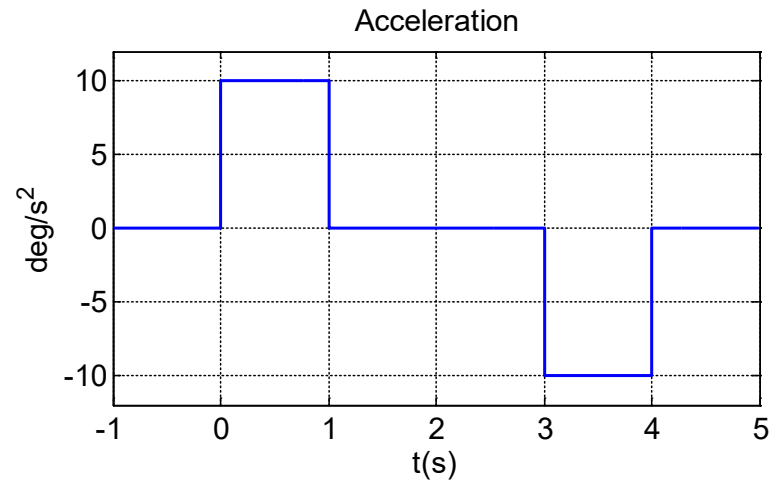
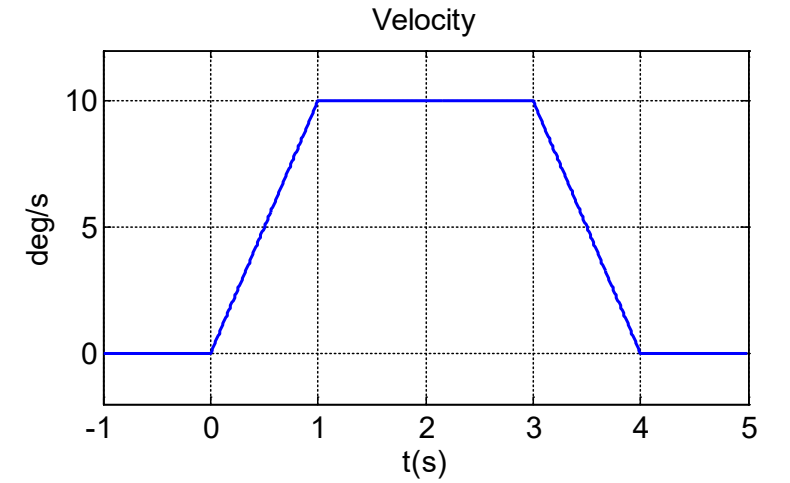
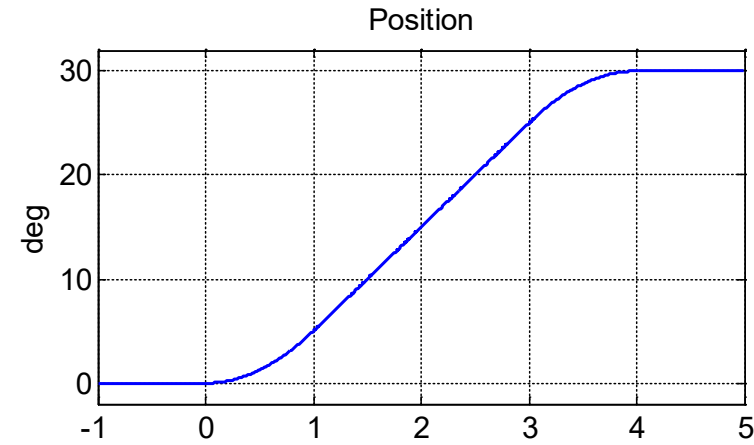
$$\dot{q}(t) = \frac{\dot{q}_v}{T_a} (t_f - t)$$

$$q(t) = q_f - \frac{\dot{q}_v}{2T_a} (t_f - t)^2$$

Profilo di velocità trapezoidale: esempio

$$t_i = 0, t_f = 4s, T_a = 1s,$$

$$q_i = 0^\circ, q_f = 30^\circ, \dot{q}_v = 10^\circ/s$$

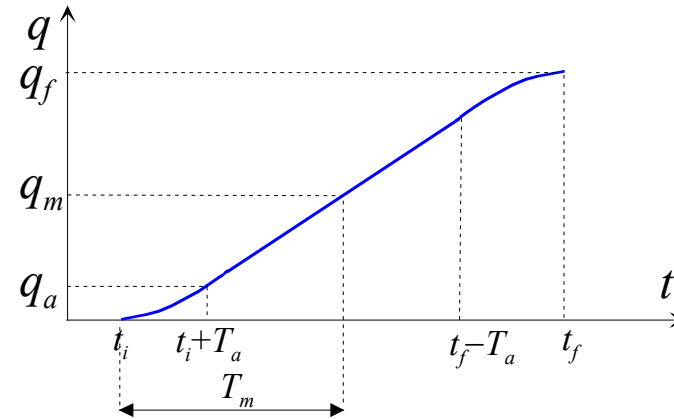


Profilo di velocità trapezoidale: vincoli

Nella scelta dei parametri della traiettoria devono essere soddisfatti dei vincoli, che assicurano il posizionamento corretto nel tempo prestabilito. Si osservi che la velocità all'istante $t_i + T_a$ si può ottenere come:

$$\ddot{q}_c T_a = \frac{q_m - q_a}{T_m - T_a} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} q_a = q(t_i + T_a) \\ q_m = (q_i + q_f)/2 \\ T_m = (t_f - t_i)/2 \end{cases}$$

Inoltre risulta: $q_a = q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c T_a^2$



Eliminando dalle precedenti equazioni le variabili q_m, q_a, T_m , si ricava il vincolo:

$$\ddot{q}_c T_a^2 - \ddot{q}_c (t_f - t_i) T_a + (q_f - q_i) = 0$$

Un vincolo sulla velocità si ottiene dall'integrale del trapezio: $q_f - q_i = \dot{q}_v (t_f - t_i - T_a)$

$$\dot{q}_v = \frac{q_f - q_i}{t_f - t_i - T_a}$$

Possiamo quindi assegnare liberamente **solo un valore** tra \ddot{q}_c, \dot{q}_v e T_a

Profilo di velocità trapezoidale: possibili specifiche

Dati:

- la distanza da percorrere $h = q_f - q_i$
- il tempo di percorrenza $T = t_f - t_i$

Se imponiamo il **tempo di accelerazione** T_a :

$$T_a \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_v = \frac{h}{T - T_a} \\ \ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_v}{T_a} \end{cases}$$

Se imponiamo la **velocità** \dot{q}_v :

$$\dot{q}_v \Rightarrow \begin{cases} T_a = \frac{T\dot{q}_v - h}{\dot{q}_v} \\ \ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_v}{T_a} \end{cases}$$

Se imponiamo l'**accelerazione** \ddot{q}_c :

$$\ddot{q}_c \Rightarrow \begin{cases} T_a = \frac{\ddot{q}_c T - \sqrt{\ddot{q}_c^2 T^2 - 4\ddot{q}_c h}}{2\ddot{q}_c} \\ \dot{q}_v = \ddot{q}_c T_a \end{cases} \quad (\text{deve essere: } |\ddot{q}_c| \geq \frac{4|h|}{T^2})$$

Profilo di velocità trapezoidale: accelerazione e velocità massime

Se si vogliono imporre i **valori massimi di velocità ed accelerazione** consentiti dall'attuatore, invece del tempo di posizionamento, si pone:

$$\begin{cases} T_a = \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} & \text{tempo di accelerazione} \\ h = \dot{q}_{\max}(T - T_a) & \text{distanza percorsa} \end{cases}$$

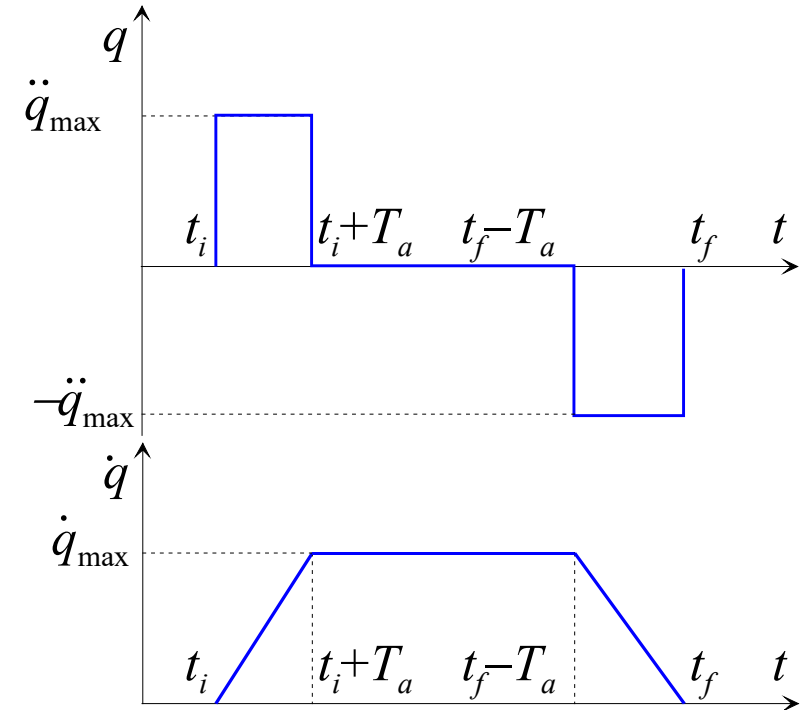
Il tempo di posizionamento vale quindi:

$$T = \frac{h}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}$$

Ricordiamo che il tempo di accelerazione non può superare la metà del tempo di posizionamento:

$$T_a \leq \frac{T}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} \right) \quad \longrightarrow \quad h \geq \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}}$$

(condizione da verificare)



Profilo di velocità triangolare

$$h < \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}}$$

in questo caso non si possono raggiungere sia l'accelerazione sia la velocità massime

Si adotta un **profilo di velocità triangolare**, in cui si sfrutta la massima accelerazione consentita.

Poiché risulta:

$$T_a = \sqrt{\frac{h}{\ddot{q}_{\max}}}$$

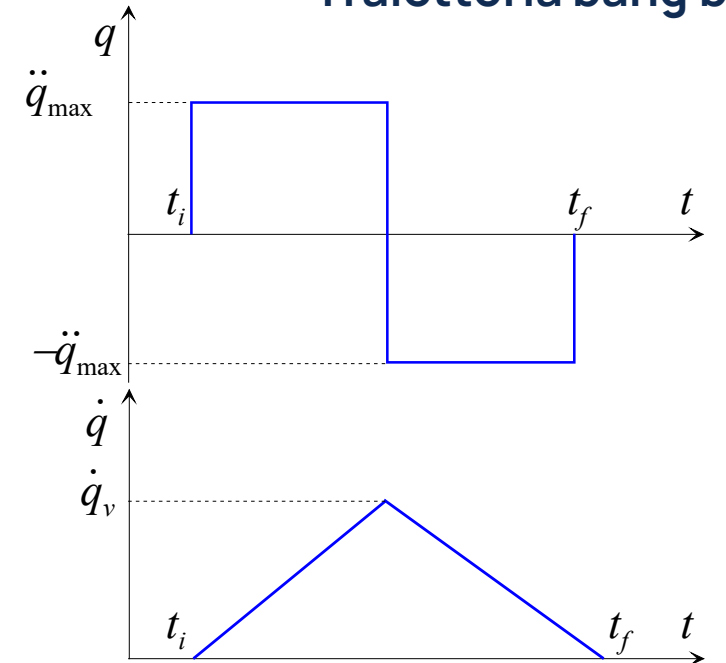
Il tempo di posizionamento è:

$$T = 2T_a = 2\sqrt{\frac{h}{\ddot{q}_{\max}}}$$

La velocità massima raggiunta in questo caso è:

$$\dot{q}_v = \ddot{q}_{\max} T_a = \frac{h}{T_a} = 2\frac{h}{T}$$

Traiettoria bang bang



Profilo di velocità trapezoidale/triangolare : moto coordinato di più giunti

Come unica forma di coordinamento tra i giunti del manipolatore, si fa in modo che il moto di tutte le coordinate di giunto termini allo stesso istante.

Si opera in questo modo:

- Per il giunto che deve effettuare il movimento più ampio si imposta il massimo valore di accelerazione \ddot{q}_{\max} e si calcolano i valori T_a e T corrispondenti.
- Per gli altri giunti si pianifica il movimento sulla base della durata T e del tempo di accelerazione T_a secondo le formule viste precedentemente.

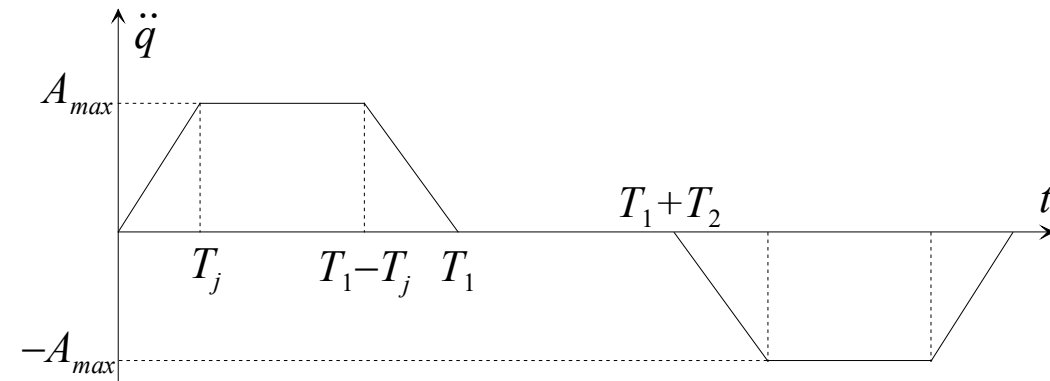
Limitazione del jerk

Nella traiettoria a profilo di velocità trapezoidale l'accelerazione ha un andamento discontinuo. Ne consegue che il jerk (derivata dell'accelerazione) assume valori infiniti. Questo può provocare forti sollecitazioni sul sistema meccanico, che possono indurre vibrazioni.

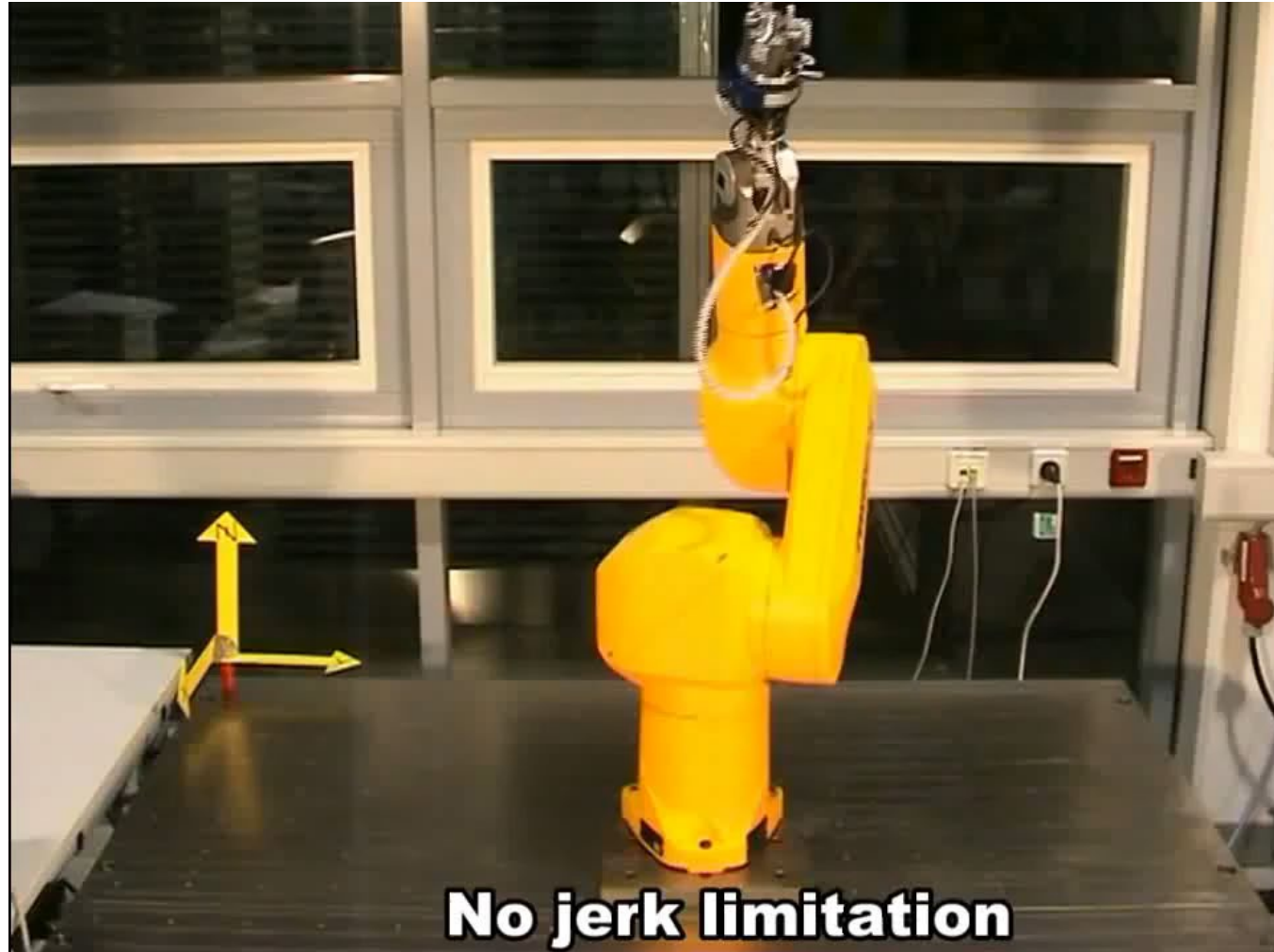
Per ovviare a questo problema, si può modificare la pianificazione della traiettoria, dando **continuità al profilo di accelerazione**, che assume andamento trapezoidale nelle due fasi di accelerazione iniziale e decelerazione finale.

La traiettoria è quindi divisa in tre parti principali:

1. **Fase di accelerazione** (l'accelerazione viene portata linearmente al valore massimo, mantenuta al valore massimo e riportata linearmente a zero);
2. **Fase di crociera** (velocità costante);
3. **Fase di decelerazione** (si decelera in modo speculare rispetto alla fase 1).



Limitazione del jerk



Traiettorie nello spazio operativo

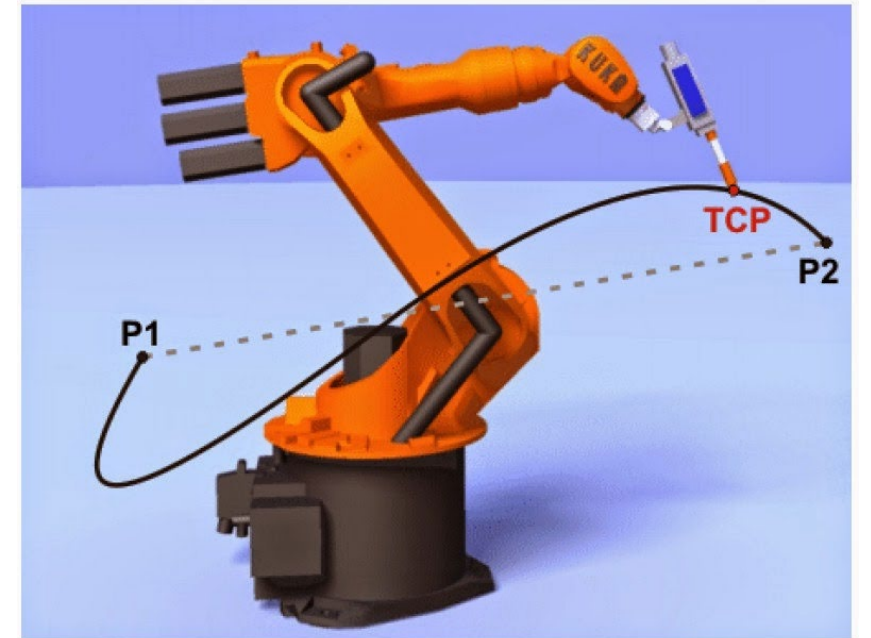
04

Traiettorie nello spazio operativo

La pianificazione della traiettoria nello spazio dei giunti produce movimenti imprevedibili dell'end effector. Quando vogliamo che il movimento evolva lungo un percorso predefinito nello **spazio operativo**, è necessario pianificare la traiettoria direttamente in questo spazio.

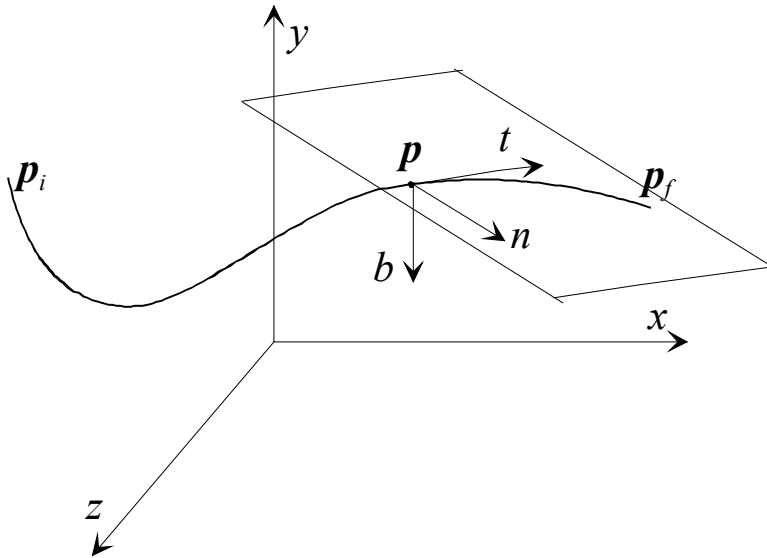
La pianificazione della traiettoria nello spazio operativo comporta sia un problema di pianificazione del percorso che un problema di pianificazione della legge oraria: sia il percorso sia la legge oraria possono essere espressi analiticamente, come verrà mostrato di seguito.

Affronteremo prima la pianificazione della traiettoria per la posizione, quindi ci concentreremo sull'orientamento.



Parametrizzazione del percorso

Consideriamo una rappresentazione parametrica di una curva nello spazio. La parametrizzazione può essere eseguita rispetto all'**ascissa curvilinea** (lunghezza dell'arco di traiettoria): $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$



Possiamo definire i vettori unitari tangenti, normali e binormali:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{p}(s)}{ds}$$

vettore tangente unitario

$$\mathbf{n} = \frac{d^2\mathbf{p}(s)/ds^2}{\|d^2\mathbf{p}(s)/ds^2\|}$$

vettore normale unitario (appartiene al piano osculatore)

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

vettore binormale unitario

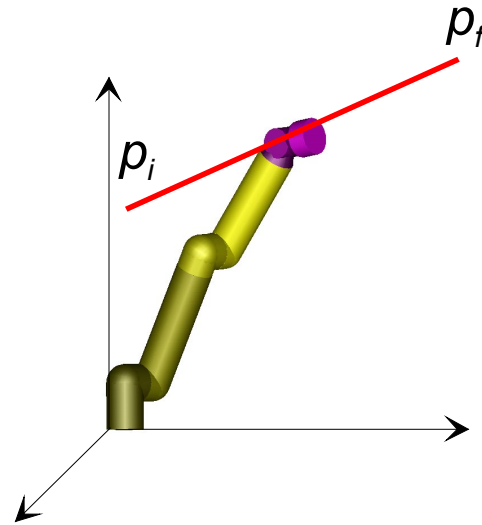
Percorso lineare

Come esempio di parametrizzazione del percorso possiamo considerare un **segmento** nello spazio (percorso cartesiano lineare):

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{1}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$$

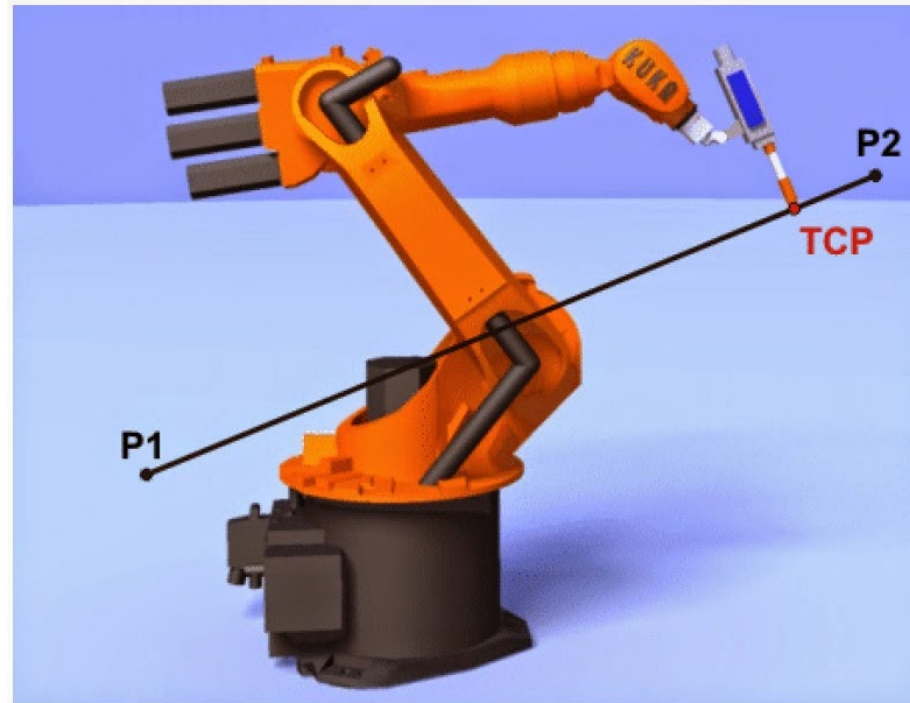
$$\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = 0$$



In questo caso non è possibile definire il sistema di riferimento $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ in modo univoco.

Percorso lineare

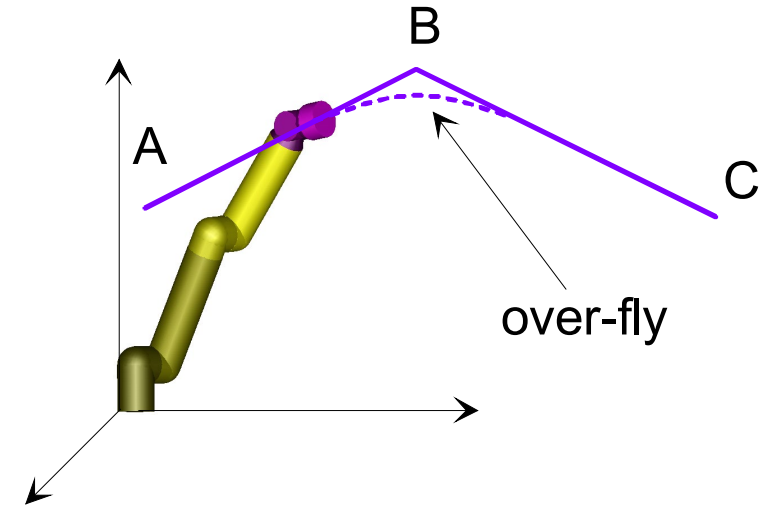
Un percorso lineare è completamente caratterizzato una volta dati due punti nello spazio Cartesiano.



Concatenazione di percorsi lineari

I percorsi lineari possono essere concatenati per ottenere percorsi più elaborati.

Il punto intermedio tra due segmenti consecutivi può essere considerato come un **punto di via**, che non viene raggiunto e nel quale il robot non si deve fermare.



Durante il passaggio al volo, cioè il passaggio vicino a un punto di via, il percorso rimane sempre nel piano specificato dalle due linee che si intersecano nel punto di via. Ciò significa che il **problema** della pianificazione del passaggio al volo è **planare**.

Si possono derivare le formule per eseguire il raccordo (tipicamente parabolico)

Percorso circolare

Una rappresentazione parametrica di una circonferenza di raggio ρ che giace su un piano $x'y'$ e ha il centro all'origine di tale piano è:

$$\mathbf{p}'(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos(s/\rho) \\ \rho \sin(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definendo:

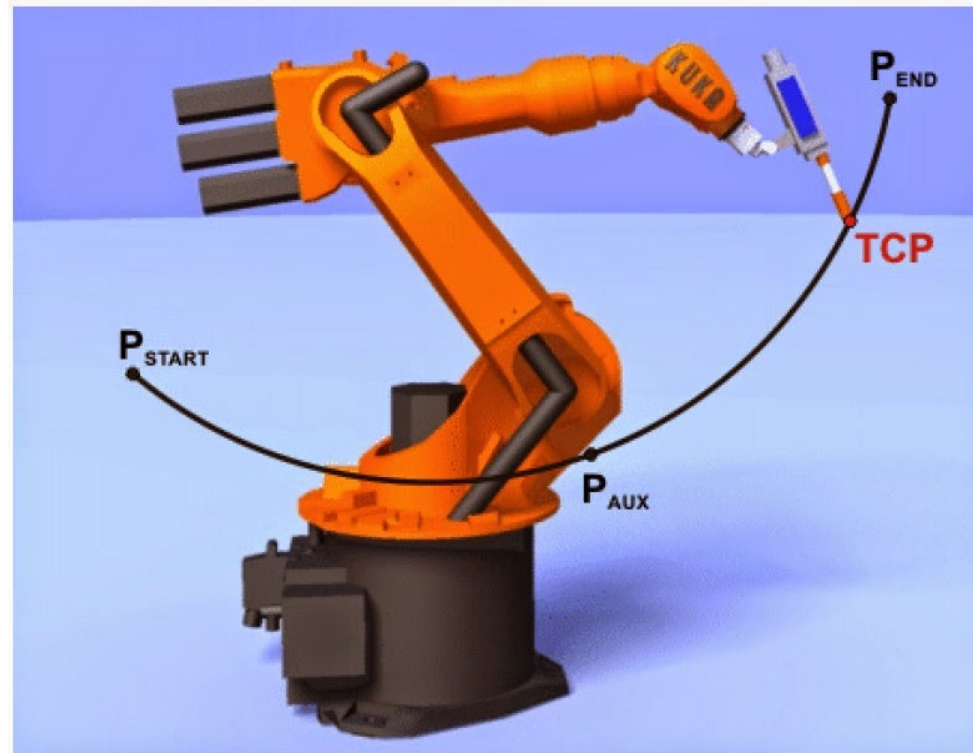
- \mathbf{c} il vettore che identifica il centro della circonferenza nel sistema di riferimento di base
- \mathbf{R} la matrice di rotazione dal sistema di base al sistema $x'y'z'$

la rappresentazione parametrica generale di una circonferenza nello spazio è:

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c} + \mathbf{R}\mathbf{p}'(s)$$

Percorso circolare

Il percorso circolare può anche essere definito assegnando tre punti nello spazio appartenenti allo stesso piano:



Traiettorie di posizione

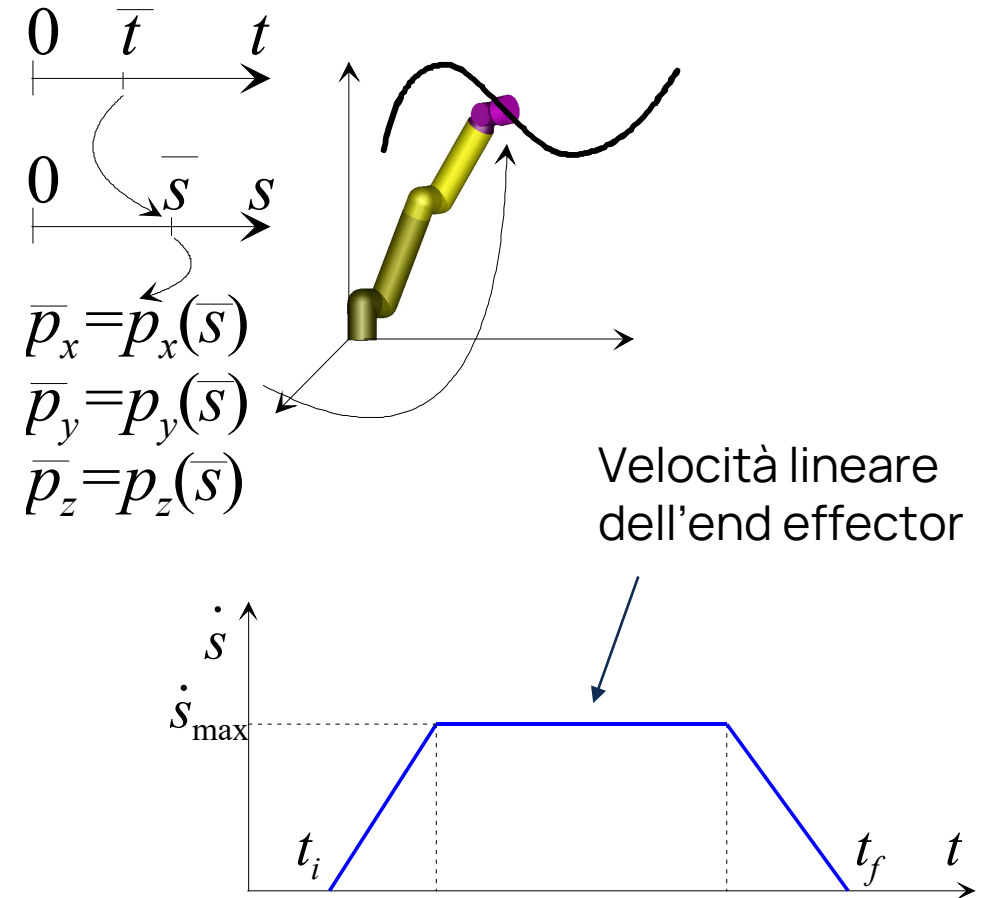
Per le **traiettorie di posizione**, tenendo conto della parametrizzazione del percorso rispetto alla coordinata naturale $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$, assegneremo la **legge oraria** attraverso la funzione $s = s(t)$.

Al fine di determinare la funzione $s(t)$ possiamo usare una qualsiasi delle leggi temporali (polinomi, profilo di velocità trapezoidale, ecc.) disponibili.

Inoltre osserviamo che:

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{s} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \dot{s} \mathbf{t} \quad |\dot{s}| \text{ è allora la } \mathbf{norma della velocità}$$

Per il segmento:
$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\dot{s}}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = \dot{s} \mathbf{t}$$



Traiettorie di orientamento

Per la **pianificazione dell'orientamento** potremmo interpolare (ad esempio linearmente) le componenti dei vettori unitari $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{a}(t)$

Questa procedura non è tuttavia consigliabile in quanto l'ortonormalità dei vettori unitari non può essere garantita in ogni momento.

Un modo alternativo è **interpolare tre angoli di Eulero** ϕ , usando le seguenti relazioni

$$\phi(s) = \phi_i + \frac{s}{\|\phi_f - \phi_i\|} (\phi_f - \phi_i)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|} (\phi_f - \phi_i)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\ddot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|} (\phi_f - \phi_i)$$

Possiamo usare qualsiasi legge temporale $s(t)$ sull'ascissa curvilinea.

La velocità angolare ω , che è linearmente correlata a $\dot{\phi}$, ha una variazione continua dell'ampiezza.

L'**orientamento intermedio** è tuttavia scarsamente prevedibile e di **difficile comprensione**.

Traiettorie di orientamento

L'orientamento può essere pianificato anche ricorrendo alla **rappresentazione asse/angolo**

Siano \mathbf{R}_i e \mathbf{R}_f le matrici di rotazione, rispetto al sistema di base, del sistema di riferimento solidale all'end effector iniziale e finale.

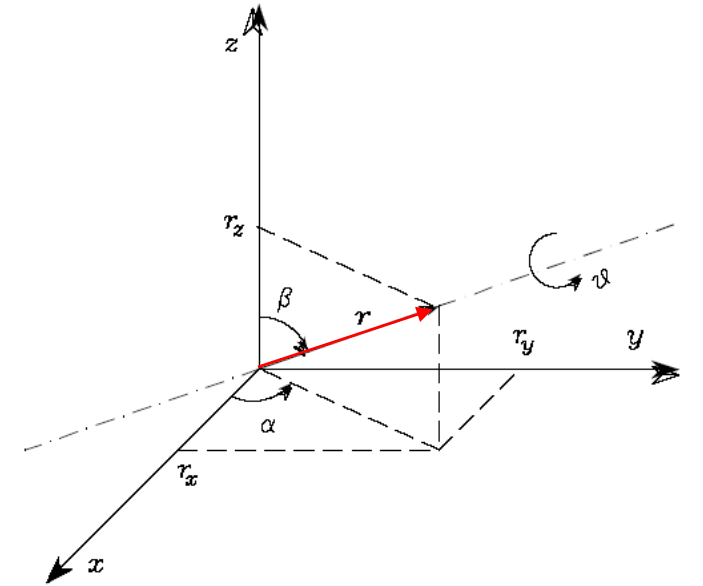
La matrice di rotazione tra i due sistemi, con relativa rappresentazione asse/angolo è quindi:

$$\mathbf{R}_f^i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\cos \vartheta_f = \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}$$

$$\sin \vartheta_f = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(r_{12} - r_{21})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{23} - r_{32})^2}$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2 \sin \vartheta_f} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$



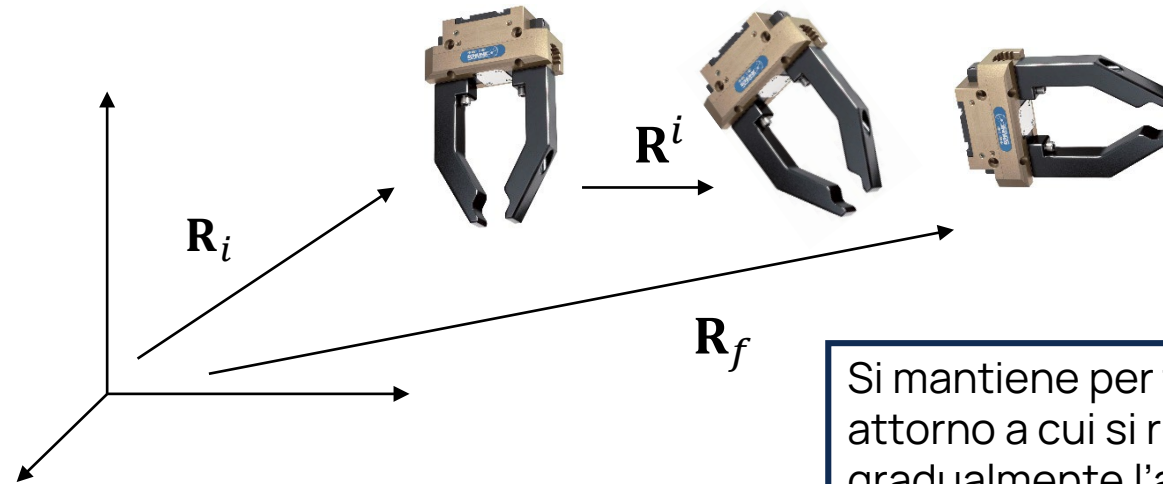
$$\vartheta_f = \text{Atan2}(\sin \vartheta_f, \cos \vartheta_f)$$

Traiettorie di orientamento

Definiamo con $\mathbf{R}^i(t)$ la matrice che descrive la transizione da \mathbf{R}_i a \mathbf{R}_f .

Si ha:

$$\mathbf{R}^i(0) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{R}^i(t_f) = \mathbf{R}_f^i$$



Si mantiene per tutta la traiettoria l'**asse** attorno a cui si ruota **costante** e si varia gradualmente l'angolo: variazione dell'orientamento **comprensibile**

La matrice $\mathbf{R}^i(t)$ può essere interpretata come $\mathbf{R}^i(\vartheta(t), \mathbf{r})$, dove:

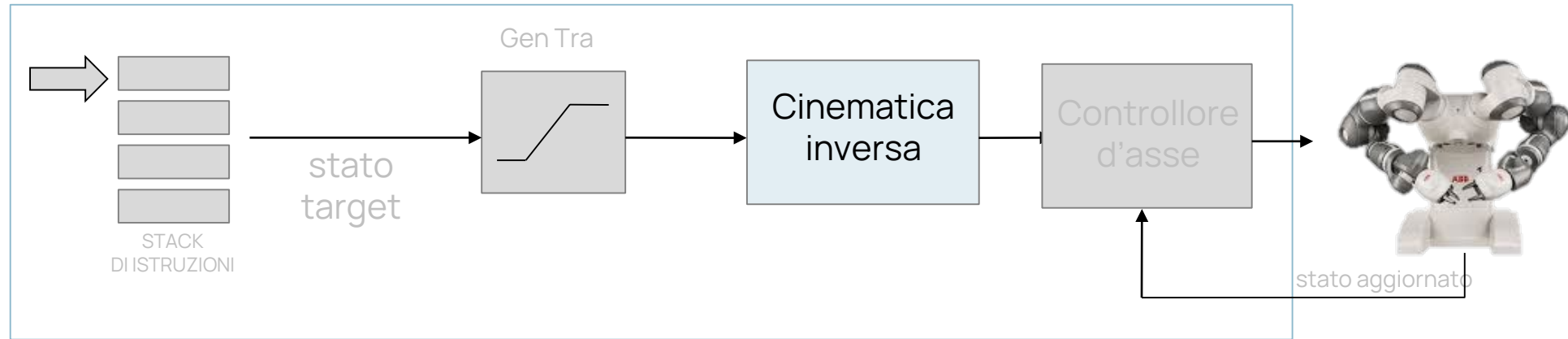
- \mathbf{r} è costante e può essere calcolato dagli elementi di \mathbf{R}_f^i
- $\vartheta(t)$ può essere reso variabile con il tempo, attraverso una legge oraria, con $\vartheta(0) = 0, \vartheta(t_f) = \vartheta_f$

Per caratterizzare l'orientamento nel sistema di base è quindi sufficiente calcolare $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_i \mathbf{R}^i(t)$

Cinematica inversa

05

Elementi di un sistema di pianificazione e controllo del movimento



- **Stack di istruzioni:** elenco di istruzioni da eseguire, specificato utilizzando il linguaggio di programmazione proprietario
- **Generazione traiettoria:** converte un'istruzione in una traiettoria da eseguire
- **Cinematica inversa:** mappa la traiettoria dallo spazio cartesiano allo spazio dei giunti (se necessario)
- **Controllore d'asse:** chiude l'anello di controllo garantendo prestazioni di inseguimento

Cinematica inversa

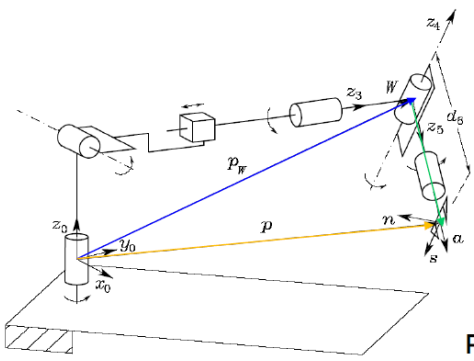
Una volta generata una traiettoria nello spazio operativo, il passo successivo da compiere è calcolare l'inversione cinematica.

Abbiamo già considerato il problema nello studio della cinematica del robot, in particolare nel caso di manipolatore con polso sferico.

Non tutti i robot però hanno polso sferico e non sempre si riesce a calcolare la cinematica inversa in forma chiusa.

POLITECNICO DI MILANO Fondamenti di robotica - Cinematica del robot - Paolo Rocco 38

Manipolatore con polso sferico



Se il manipolatore ha polso sferico, si può disaccoppiare la soluzione del problema cinematico inverso per la posizione da quella per l'orientamento

Posizione del centro polso:

$$\mathbf{p}_W = \mathbf{p} - d_6 \mathbf{a}$$

Procedura operativa

- si calcola la posizione del centro polso \mathbf{p}_W
- si risolve la cinematica inversa per (q_1, q_2, q_3)
- si calcola la matrice $\mathbf{R}_3^0(q_1, q_2, q_3)$
- si calcola $\mathbf{R}_6^3(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) = \mathbf{R}_3^0 \mathbf{R}$
- si risolve la cinematica inversa per l'orientamento, ricavando $(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)$

difficile ma di solito fattibile (vedere prossime slide)

vedere la slide dedicata

Inversione della cinematica differenziale

Ricordiamo che la relazione cinematica differenziale è lineare per un certo valore di \mathbf{q} :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

Dato un vettore \mathbf{x}_d di coordinate desiderate nello spazio operativo e una condizione iniziale su \mathbf{q} potremmo risolvere il problema dell'inversione cinematica **invertendo la cinematica differenziale** e quindi integrando. Se lo Jacobiano è quadrato ($n = 6$) e non siamo in singolarità:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}_d \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma)d\sigma + \mathbf{q}(0)$$

Tuttavia, utilizzando direttamente questa espressione, possono verificarsi **derive** della soluzione per via dell'integrazione (accumulo di errori).

Inversione della cinematica differenziale

Introduciamo l'**errore** nello spazio operativo commesso dall'algoritmo di inversione cinematica:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$$

Se adottiamo la seguente dipendenza di $\dot{\mathbf{q}}$ da \mathbf{e} :

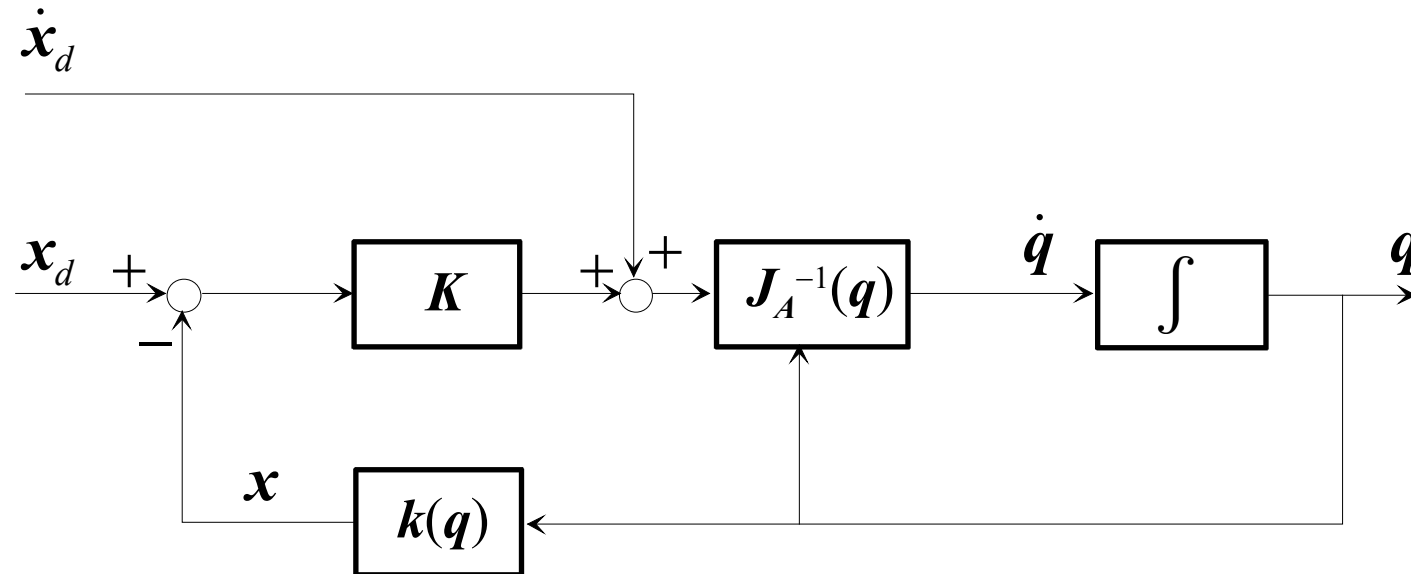
$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}\mathbf{e})$$

otteniamo:

$$\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}\mathbf{e} = 0$$

Basta prendere \mathbf{K} definita positiva per avere **asintotica stabilità**

Matematicamente, il metodo corrisponde a risolvere il problema della cinematica inversa attraverso un **metodo iterativo di Gauss-Newton**.



Inversa smorzata dello Jacobiano

Per mitigare i problemi dovuti alle singolarità cinematiche nell'inversione dello Jacobiano, si può usare una **matrice inversa ai minimi quadrati smorzata**

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^*(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}_d$$

con:

$$\mathbf{J}_A^* = \mathbf{J}_A^T (\mathbf{J}_A \mathbf{J}_A^T + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1}$$

λ è un fattore di smorzamento che rende l'operazione di inversione meglio condizionata numericamente. Si può dimostrare che questa soluzione corrisponde a riformulare il problema come ottimizzazione di un funzionale di costo:

$$\mathbf{H}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{J}_A \dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$$

Si tollera un errore nell'inversione della matrice Jacobiana a vantaggio di velocità di giunto limitate.

Trasposta dello Jacobiano

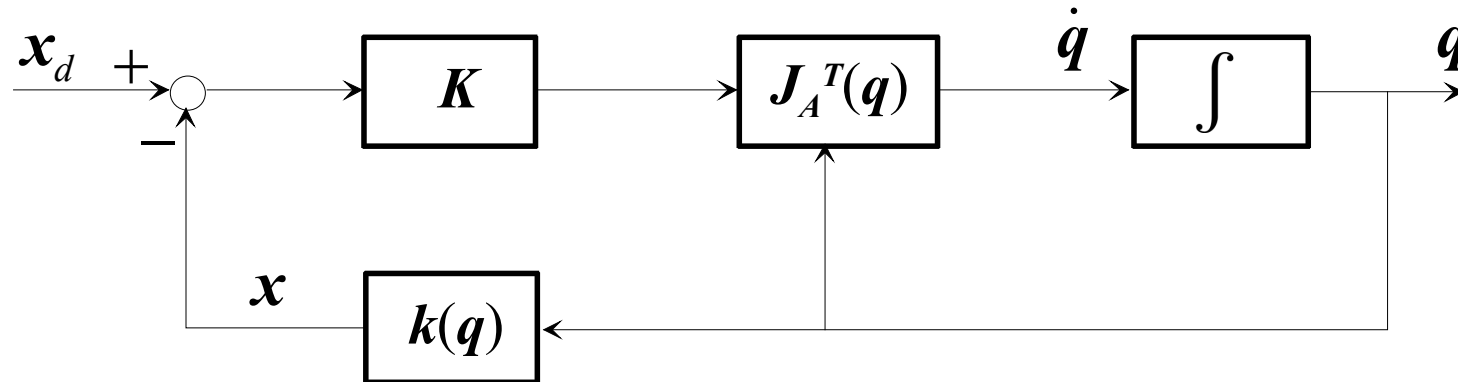
Se adottiamo la seguente dipendenza (più semplice) :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{K}\mathbf{e}$$

otteniamo il diagramma:

Matematicamente, il metodo corrisponde a risolvere il problema della cinematica inversa attraverso un **metodo iterativo di discesa lungo il gradiente**.

Se \mathbf{K} è una matrice definita positiva lo stato di equilibrio è globalmente asintoticamente stabile.



Errore di orientamento

Negli schemi che abbiamo visto si calcola l'errore commesso dall'algoritmo di inversione cinematica.

Errore di posizione

$$\mathbf{e}_p = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}$$

Errore di orientamento

$$\mathbf{e}_\phi = \boldsymbol{\phi}_d - \boldsymbol{\phi}$$

In alternativa l'errore di orientamento si può ottenere dalla matrice che esprime la rotazione desiderata \mathbf{R}_d e dalla matrice che esprime la rotazione \mathbf{R} calcolata dall'algoritmo:

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_d \mathbf{R}^T$$

Si può estrarre la **rappresentazione asse-angolo** da questa matrice e usarla come errore di orientamento



POLITECNICO
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Contatti

Paolo Rocco
paolo.rocco@polimi.it