



POLITECNICO
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Fondamenti di robotica

Cinetostatica del robot

13.03.2026 | Paolo Rocco

Contenuti

1. **Statica del robot**
2. **Cinetostatica del robot**

Statica del robot

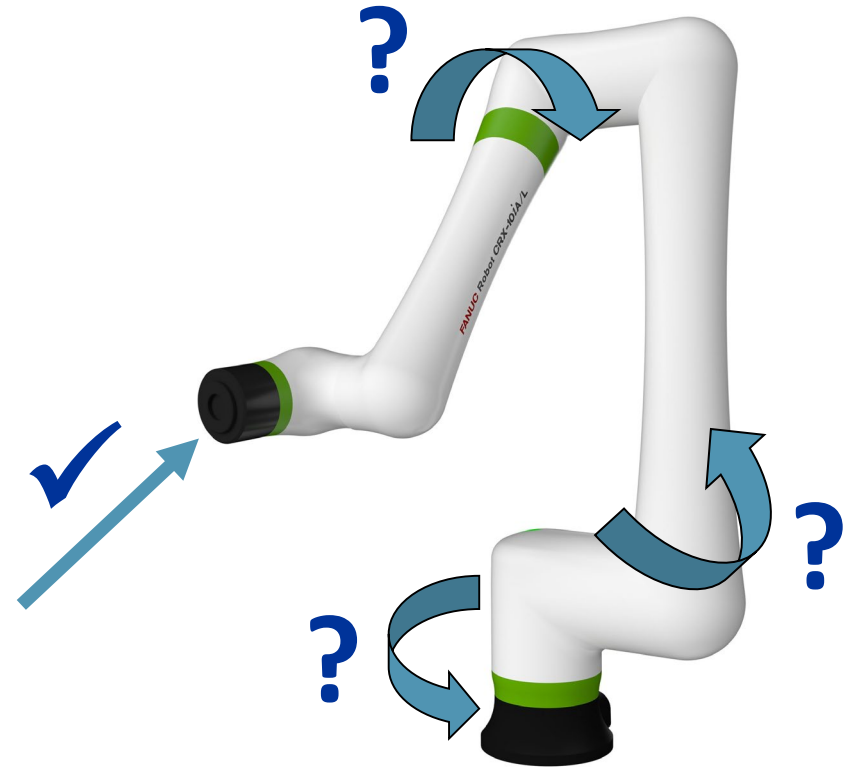
01

Statica del manipolatore

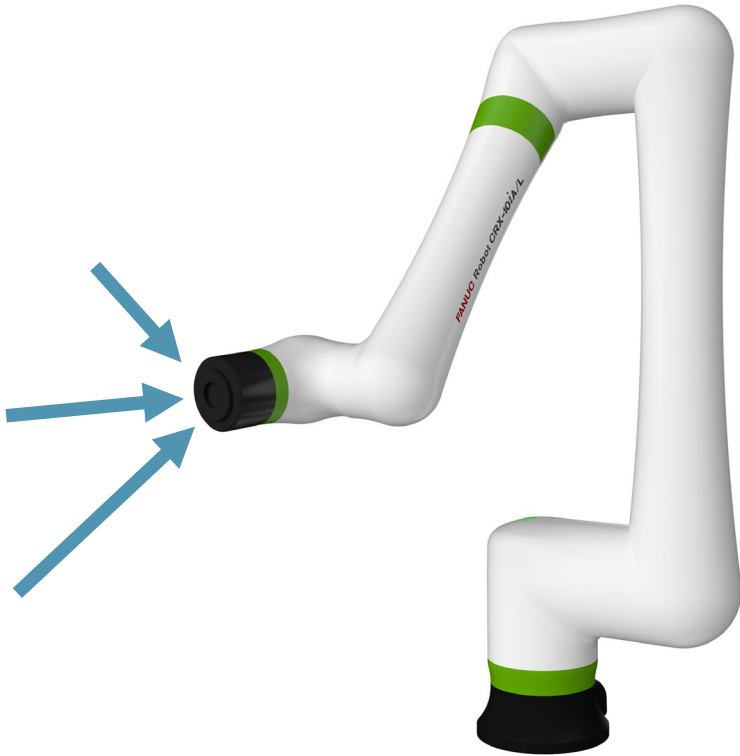
Uno dei problemi che si pongono nello studio del manipolatore robotico è comprendere come una forza applicata dall'esterno all'organo terminale possa essere equilibrata staticamente dalle coppie applicate ai giunti.

In modo analogo ci chiediamo, nel caso il robot interagisca con l'ambiente, quale sia la forza esercitata sull'ambiente stesso da coppie applicate ai giunti.

Il problema da affrontare è quello della **statica del manipolatore**.



Sistemi di forze

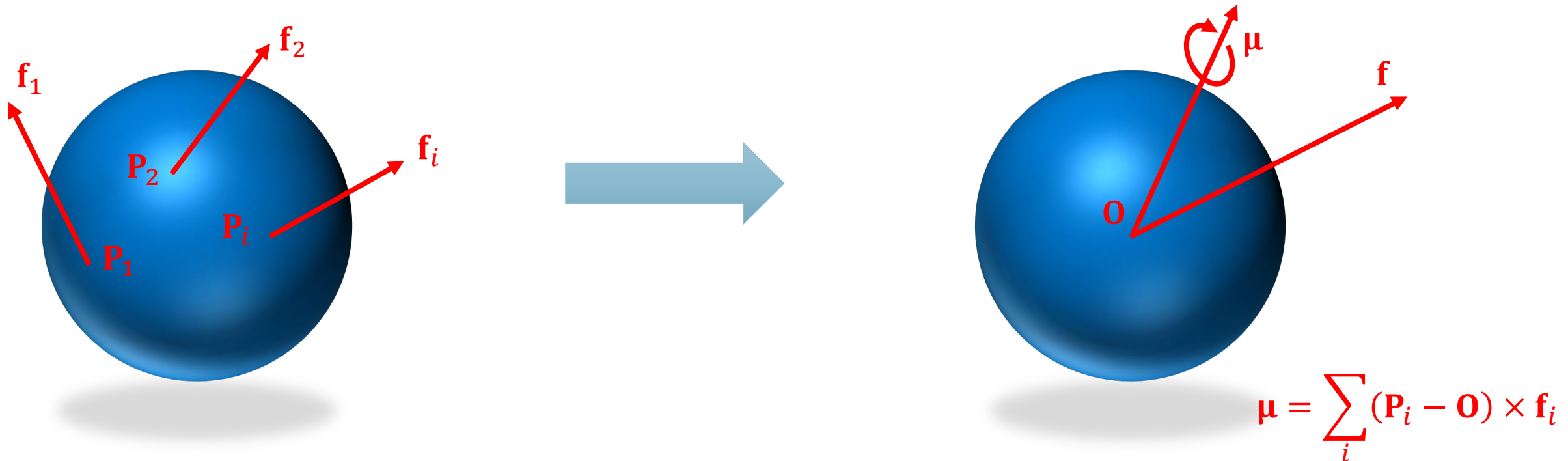


In realtà sull'organo terminale può agire un sistema più complesso di una singola forza, ovvero un sistema arbitrario di forze applicate in diversi punti dell'end effector.

Come rappresentare questa situazione in modo sintetico?

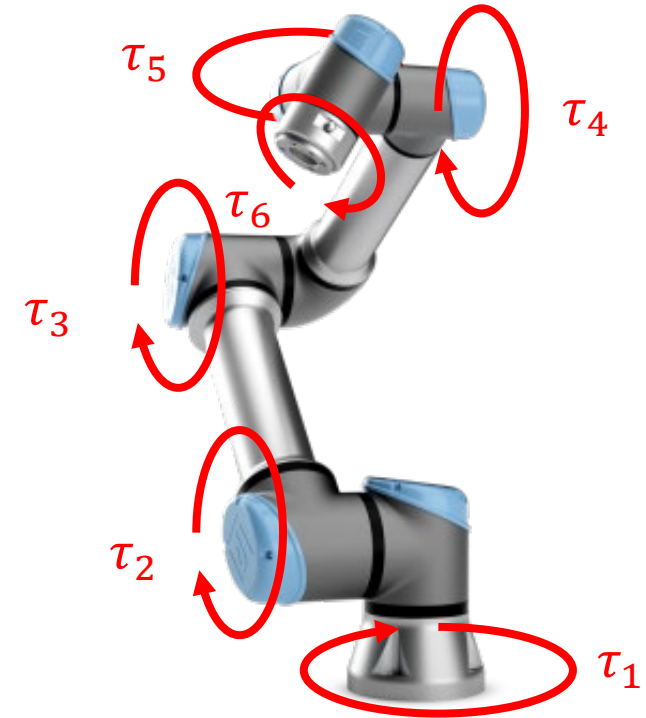
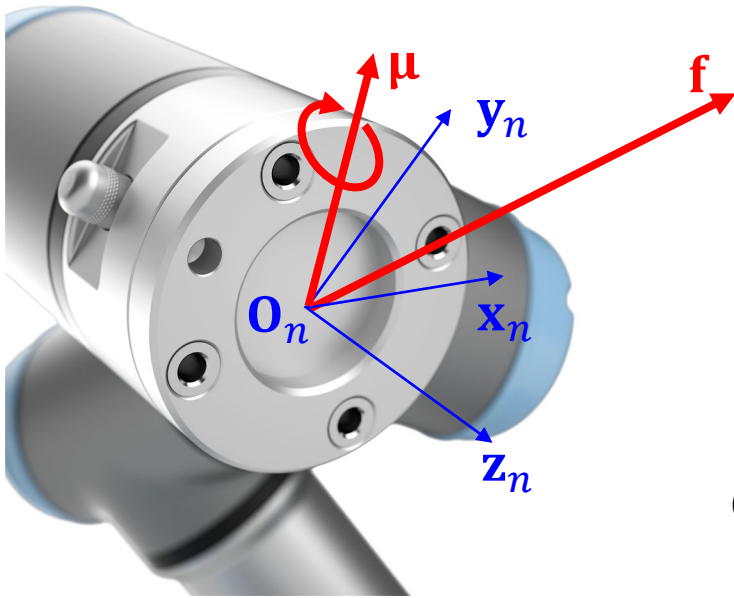
Sistemi di forze

L'end-effector è un corpo rigido e dalla meccanica sappiamo che un sistema arbitrario di forze applicato a un corpo rigido equivale a un'**unica forza** (il **risultante**, somma vettoriale di tutte le forze) applicato in un punto specifico del corpo e a un **momento**, somma dei momenti delle forze rispetto a tale punto



Sistemi di forze

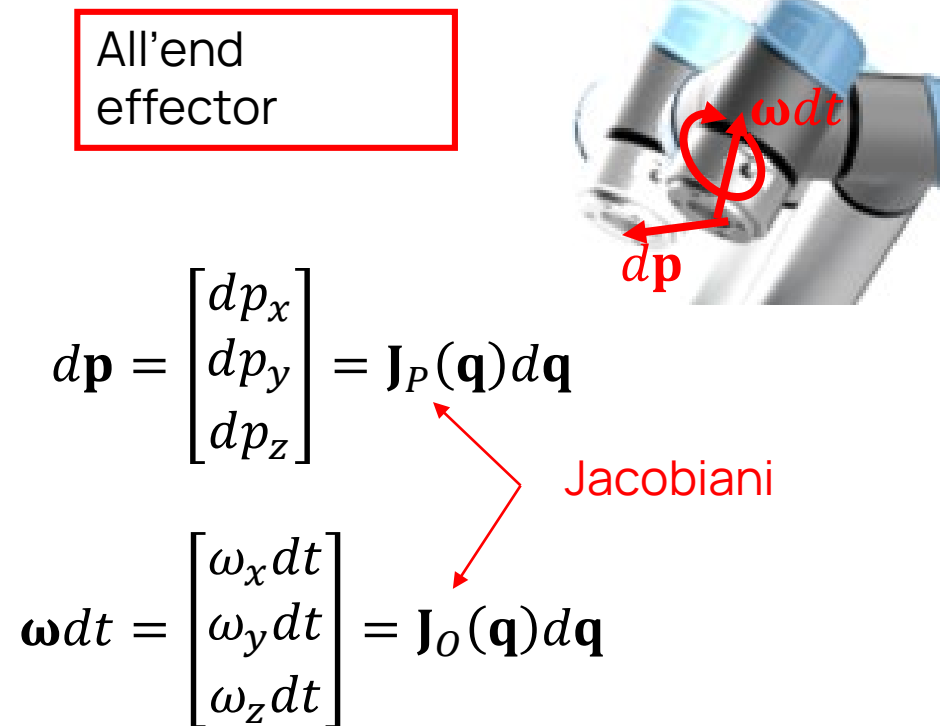
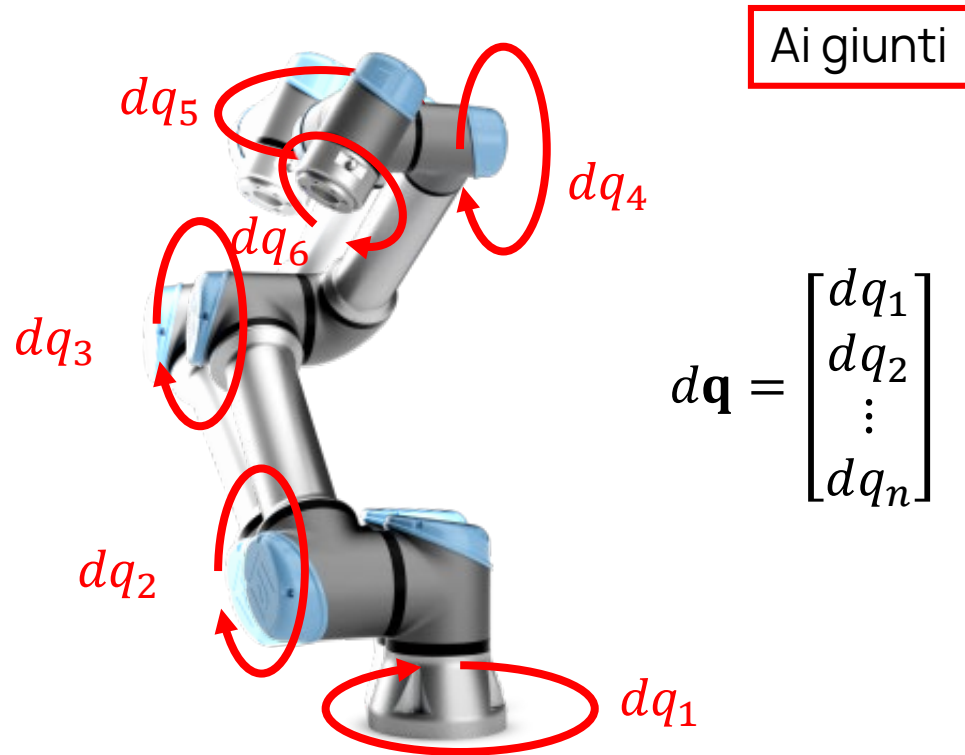
Assumeremo quindi che il risultante \mathbf{f} delle forze sia applicato all'origine \mathbf{O}_n della terna associata all'end effector e che il momento $\boldsymbol{\mu}$ sia calcolato rispetto allo stesso punto



Qual è il legame tra i vettori \mathbf{f} e $\boldsymbol{\mu}$ da una parte e le coppie ai giunti τ_i dall'altra?

Principio dei lavori virtuali

Consideriamo una variazione infinitesimale della configurazione del manipolatore, compatibile con i vincoli (**spostamento virtuale**)



Principio dei lavori virtuali

Il **lavoro virtuale** compiuto dalle coppie ai giunti è:

$$dW_{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T d\mathbf{q}$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle forze all'end effector è:

$$dW_{\gamma} = \mathbf{f}^T d\mathbf{p} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{f}^T \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) d\mathbf{q} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}$$

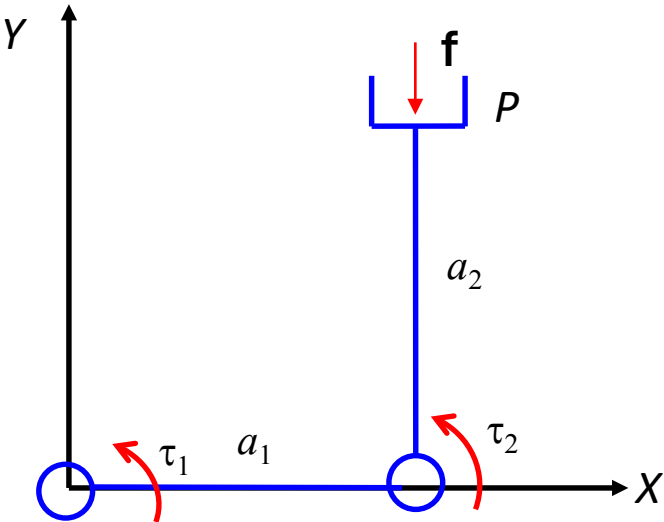
dove $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}$ raccoglie in un unico vettore forza e momento all'end effector

$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$ è lo Jacobiano geometrico del manipolatore

Principio dei lavori virtuali

Sulla base del **principio dei lavori virtuali** il sistema meccanico è in **equilibrio statico** se e solo se:

$$dW_{\tau} = dW_{\gamma}, \quad \forall d\mathbf{q} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\tau}^T d\mathbf{q} = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad \forall d\mathbf{q} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\gamma}}$$



Per un manipolatore a due giunti nella configurazione riportata ($\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$), risulta:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_2 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

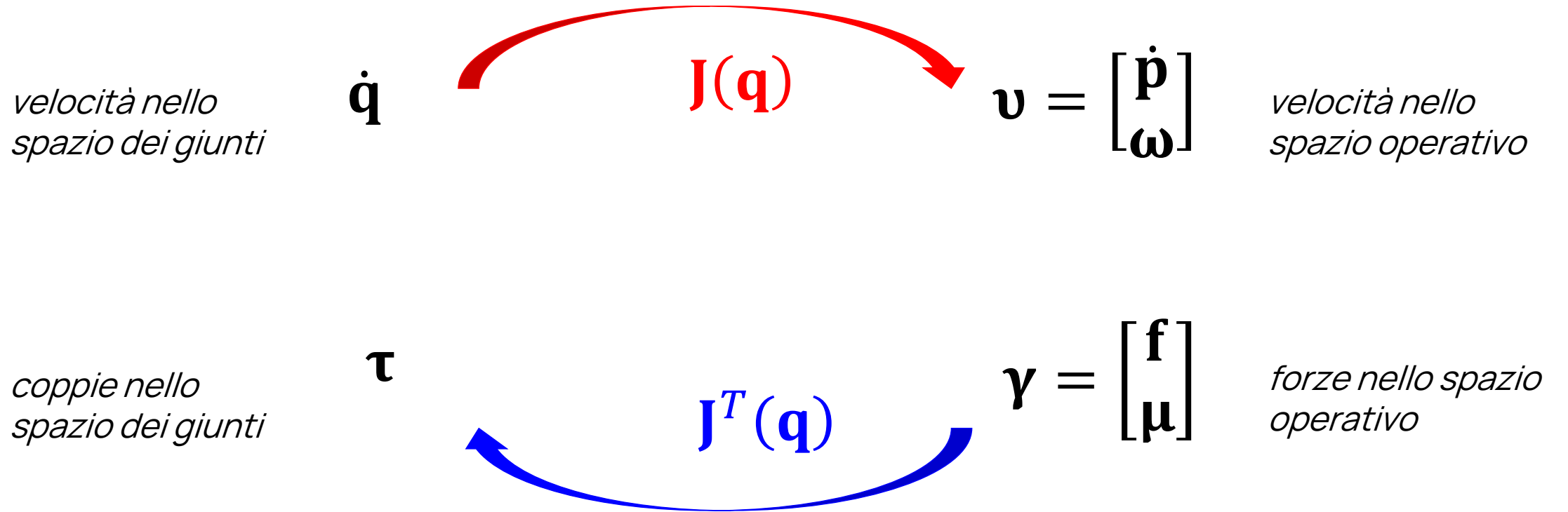
Una forza $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_y \end{bmatrix}$ è equilibrata dalle coppie $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -a_2 & a_1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 f_y \\ 0 \end{bmatrix}$

Cinetostatica del robot

02

Dualità cinetostatica

La matrice Jacobiana è coinvolta sia nella cinematica differenziale, sia nella statica:



Si parla di **dualità cinetostatica**

Ellissoide di manipolabilità in velocità

Le equazioni della cinematica differenziale e della statica e la loro dualità si prestano alla definizione di indici di prestazione del manipolatore, utili in sede di progettazione del robot e per la valutazione della capacità del robot di compiere determinati compiti in una certa configurazione.

Consideriamo dapprima le velocità dei giunti a norma unitaria:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} = 1$$

Ipotizziamo $n = m$, dimensione dello spazio dei giunti uguale alla dimensione dello spazio operativo (robot non ridondante) e quindi $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ matrice quadrata.

Determiniamo le velocità all'organo terminale $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ generabili, in una data configurazione:

$$[\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{v}]^T \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{v} = 1$$



$$\mathbf{v}^T (\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^T)^{-1} \mathbf{v} = 1$$

Ellissoide di manipolabilità in velocità

La superficie di questo ellissoide descrive quindi tutte le velocità nello spazio operativo generabili da velocità nello spazio dei giunti a norma unitaria.

Ellissoide di manipolabilità in velocità

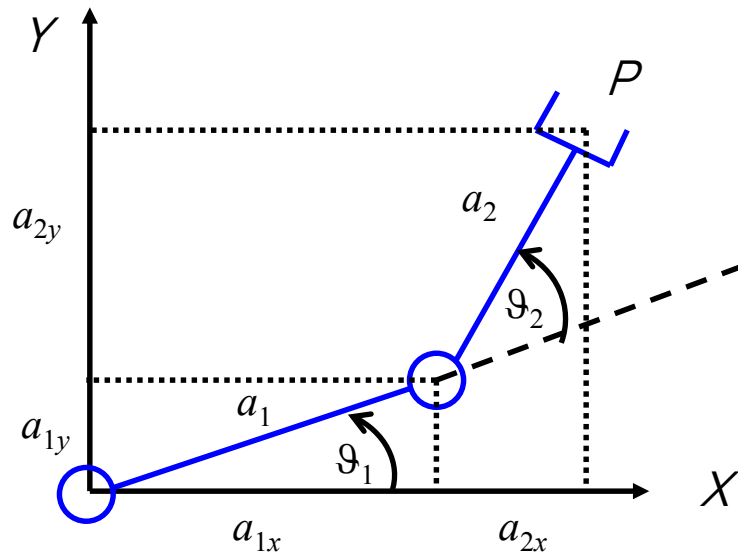
$$\mathbf{v}^T (\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^T)^{-1} \mathbf{v} = 1$$

- Nella direzione dell'asse maggiore dell'ellissoide, l'organo terminale può muoversi a velocità maggiore, viceversa nella direzione dell'asse minore
- Quanto più l'ellissoide è simile a una sfera, tanto meglio l'end effector può muoversi in ogni direzione dello spazio operativo
- Le direzioni degli assi principali dell'ellissoide sono determinate dagli autovettori della matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$
- Le dimensioni degli assi sono date dai valori singolari di \mathbf{J} , $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}$, con $\lambda_i(\cdot)$ generico autovalore della matrice
- Una misura globale della manipolabilità è data dal volume dell'ellissoide:

$$\alpha(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^T)} = |\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}))| \quad \text{misura di manipolabilità}$$

Ellissoide di manipolabilità in velocità

Consideriamo il robot planare a due giunti:



$$\alpha(\mathbf{q}) = |\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}))| = a_1 a_2 |s_2|$$

- Date le lunghezze dei link, la configurazione che massimizza la manipolabilità è $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$
- Fissata l'estensione totale $a_1 + a_2$, la struttura cinematica che ottimizza la manipolabilità si ha per $a_1 = a_2$

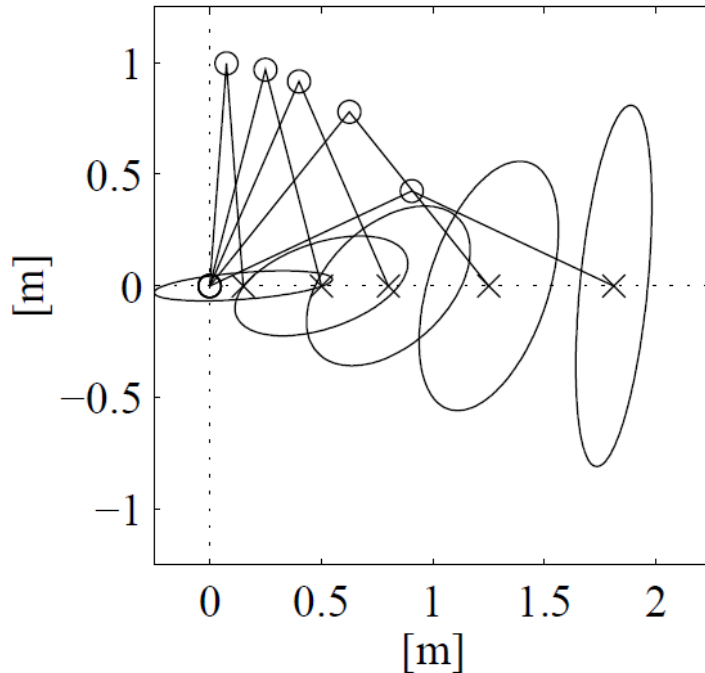
Nell'uomo, approssimativamente $a_1 = a_2$ (braccio e avambraccio) ed eseguiamo vari compiti, per esempio scrittura, con $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$



Anche noi massimizziamo la manipolabilità!

Ellissoide di manipolabilità in velocità

Per il robot planare a due giunti si possono tracciare gli ellissoidi di manipolabilità in velocità in varie configurazioni:



Quando il manipolatore è quasi steso, l'ellissi si assottiglia lungo l'asse verticale



Il manipolatore può generare velocità in punta preferibilmente lungo la direzione verticale

Immagine da:
B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo:
Robotica: modellistica, pianificazione e controllo, 3a Ed.
McGraw-Hill Italia, 2008

Ellissoide di manipolabilità in forza

In base alla dualità cinetostatica, possiamo studiare la manipolabilità, oltre che rispetto alle velocità, anche rispetto alle forze.

Consideriamo dunque le coppie ai giunti a norma unitaria:

$$\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\tau} = 1$$

Determiniamo le forze e momenti all'organo terminale $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}$, equivalenti alle coppie ai giunti:

$$[\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\gamma}]^T \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\gamma} = 1 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\gamma}^T (\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^T) \boldsymbol{\gamma} = 1} \quad \text{Ellissoide di manipolabilità in forza}$$

La superficie di questo ellissoide descrive quindi tutte le forze/momenti nello spazio operativo equivalenti a coppie nello spazio dei giunti a norma unitaria.

Ellissoide di manipolabilità in forza

$$\boldsymbol{\gamma}^T (\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^T) \boldsymbol{\gamma} = 1$$

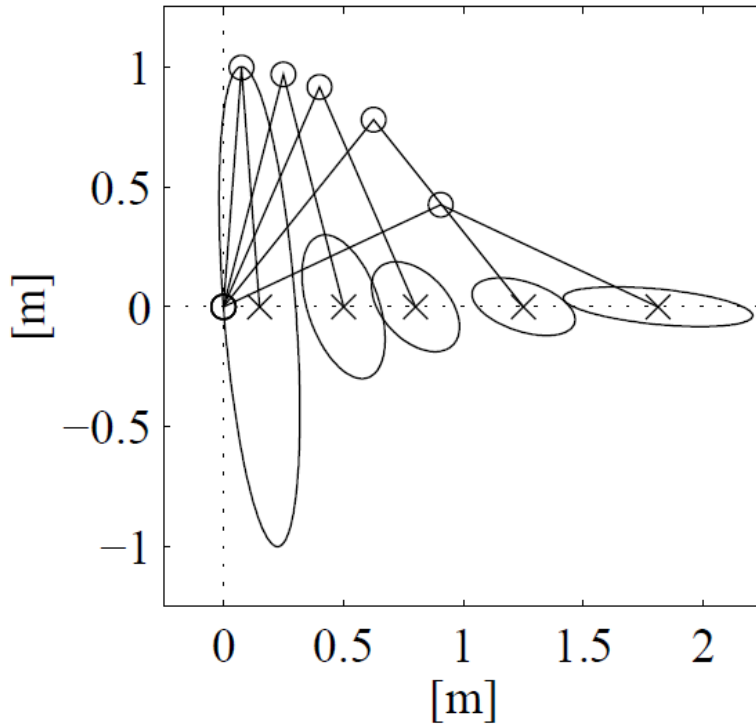
- Il nucleo della forma quadratica è la matrice inversa del nucleo della forma quadratica che definisce l'ellissoide in velocità
- Gli assi principali dell'ellissoide di manipolabilità in forza coincidono con quelli dell'ellissoide in velocità
- Le dimensioni dei relativi assi sono invece in proporzione inversa



Una direzione in cui si ha alta manipolabilità in velocità è una direzione con bassa manipolabilità in forza e viceversa

Ellissoide di manipolabilità in forza

Per il robot planare a due giunti si possono tracciare gli ellissoidi di manipolabilità in forza in varie configurazioni:



Quando il manipolatore è quasi steso, l'ellissi si assottiglia lungo l'asse orizzontale



Il manipolatore può generare forza in punta preferibilmente lungo la direzione orizzontale

Immagine da:
B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo:
Robotica: modellistica, pianificazione e controllo, 3a Ed.
McGraw-Hill Italia, 2008



POLITECNICO
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Contatti

Paolo Rocco
paolo.rocco@polimi.it