POLITECNICO MILANO 1863 | DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Fondamenti di robotica

Cinematica differenziale del robot

13.03.2026 | Paolo Rocco

Contenuti

Jacobiano geometrico

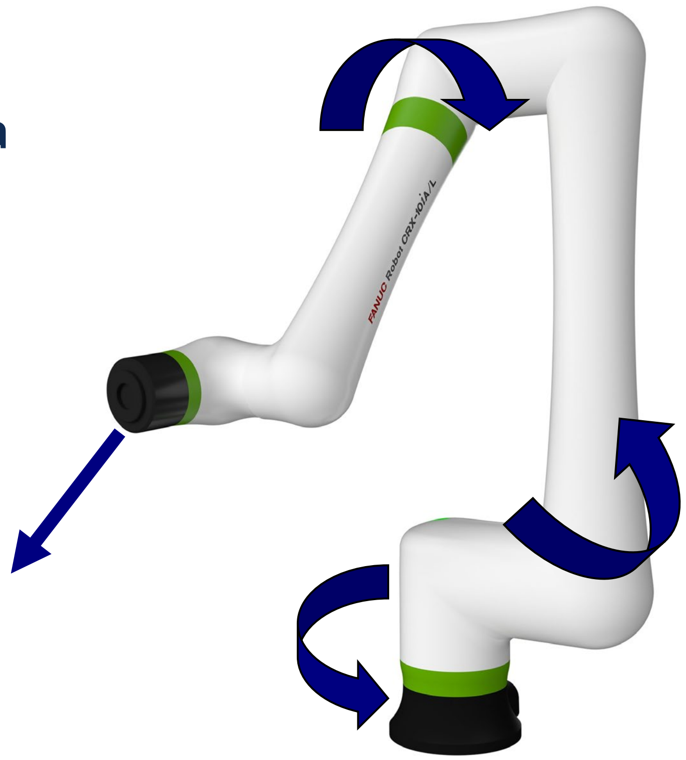
01

Introduzione

- Finora abbiamo condotto lo studio della cinematica del robot considerando le relazioni tra posizioni dei giunti e posizione e orientamento dell'end effector

- Per completare lo studio dobbiamo anche mettere in relazione le **velocità** ai giunti e la velocità dell'end effector

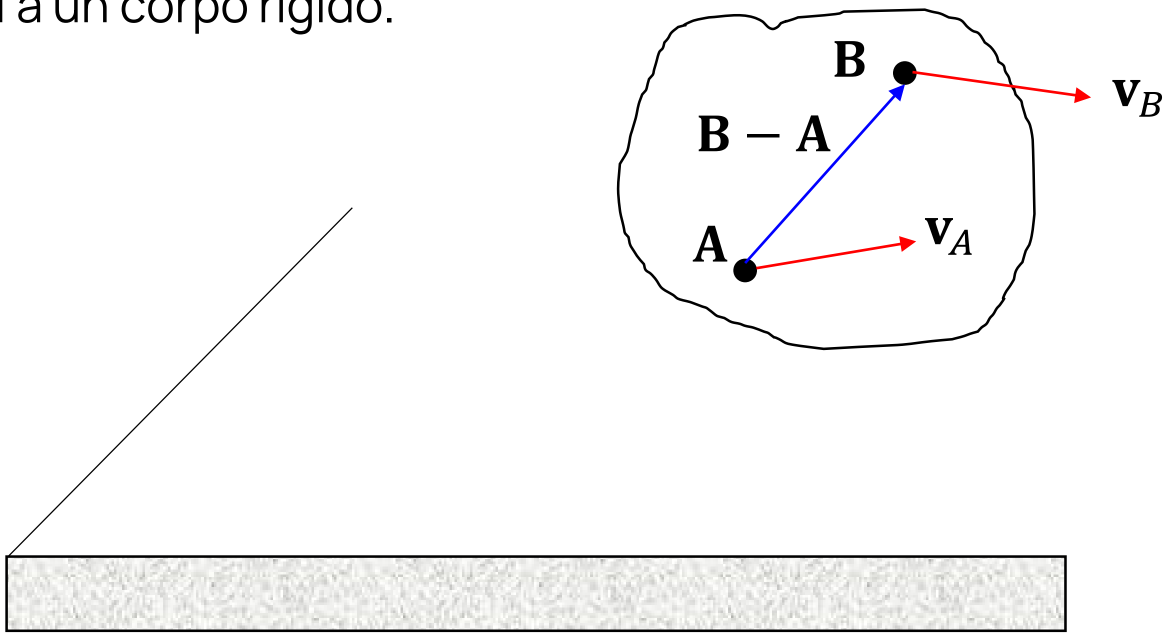
- Questa relazione prende il nome di **cinematica differenziale**



Alcune immagini in queste slide sono prese dal libro di testo:
B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo: *Robotica: modellistica, pianificazione e controllo, 3a Ed.*
McGraw-Hill Italia, 2008

Velocità del corpo rigido

Consideriamo due punti, A e B, appartenenti a un corpo rigido.



Ciascuno dei due punti sarà caratterizzato da una sua velocità ($\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$).

È possibile mettere in relazione le due velocità per mezzo della seguente relazione:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

dove $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ è il vettore che congiunge il punto A al punto B, mentre $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore **velocità angolare** del corpo rigido.

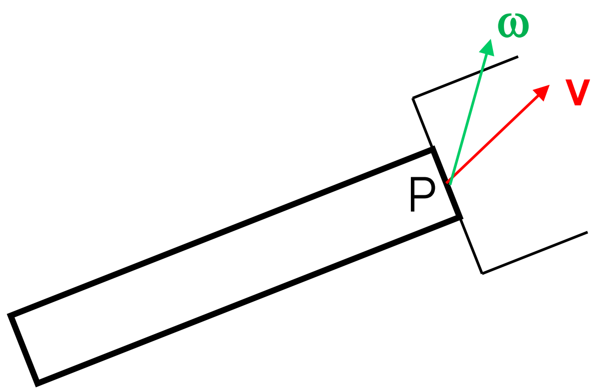
Il vettore velocità angolare è associato all'intero corpo e non dipende né dal punto A, né dal punto B.

Velocità lineare e angolare dell'end effector

Consideriamo ora come corpo rigido l'**end effector** del robot.

Ne caratterizzeremo il moto con la velocità (lineare) $\mathbf{v}$ dell'origine della terna associata all'end effector e con la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del corpo.

Il vettore velocità lineare e il vettore velocità angolare sono, appunto, **elementi di spazi vettoriali** e quindi sono ottenibili come somma di vari contributi (che saranno le velocità indotte dai singoli giunti).



Si osservi che questo non è vero per le rappresentazioni dell'orientamento (la rappresentazione minima dell'orientamento della composizione di due rotazioni non è data dalla somma delle due rappresentazioni minime).

Cinematica differenziale: Jacobiano geometrico

L'obiettivo della **cinematica differenziale** è esprimere la velocità lineare e la velocità angolare dell'end effector in termini di velocità di giunto.
Poiché i contributi delle velocità di giunto si sommano per dar luogo alle velocità dell'end effector, potremo scrivere le seguenti relazioni lineari:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$ (il vettore velocità lineare $\mathbf{v}$ è la derivata rispetto al tempo del vettore posizione $\mathbf{p}$)

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

In forma compatta: $$\begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \boldsymbol{\omega}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}\\ \boldsymbol{\omega}\end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

La matrice $(6\times n)$: $$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}\mathbf{J}_P(\mathbf{q})\\ \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\end{bmatrix}$$

è chiamata **Jacobiano geometrico** del manipolatore.

Calcolo dello Jacobiano geometrico

Esprimiamo lo Jacobiano nelle sue n colonne, ognuna a sua volta partizionata in due vettori:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{P1} & & \mathbf{j}_{Pn} \\ & \cdots & \\ \mathbf{j}_{O1} & & \mathbf{j}_{On} \end{bmatrix}$$

contributo del giunto i alla velocità lineare

Risulta:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{j}_{P1}(\mathbf{q})\dot{q}_1 + \mathbf{j}_{P2}(\mathbf{q})\dot{q}_2 + \cdots + \mathbf{j}_{Pi}(\mathbf{q})\dot{q}_i + \cdots + \mathbf{j}_{Pn}(\mathbf{q})\dot{q}_n$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{j}_{O1}(\mathbf{q})\dot{q}_1 + \mathbf{j}_{O2}(\mathbf{q})\dot{q}_2 + \cdots + \mathbf{j}_{Oi}(\mathbf{q})\dot{q}_i + \cdots + \mathbf{j}_{On}(\mathbf{q})\dot{q}_n$$

sussiste una sovrapposizione degli effetti, che useremo per determinare i singoli contributi

contributo del giunto i alla velocità angolare

Calcolo dello Jacobiano geometrico

Velocità angolare

Giunto i **prismatico**: un giunto prismatico non dà nessun contributo di velocità angolare.

$$\dot{q}_i \mathbf{j}_{Oi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}_{Oi} = 0$$

Giunto i **rotazionale**: un giunto rotazionale dà un contributo di velocità angolare diretto come l'asse di rotazione del giunto

$$\dot{q}_i \mathbf{j}_{Oi} = \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}_{Oi} = \mathbf{z}_{i-1}$$

Nel fare queste considerazioni si considerano i giunti a valle del giunto i «congelati»

Calcolo dello Jacobiano geometrico

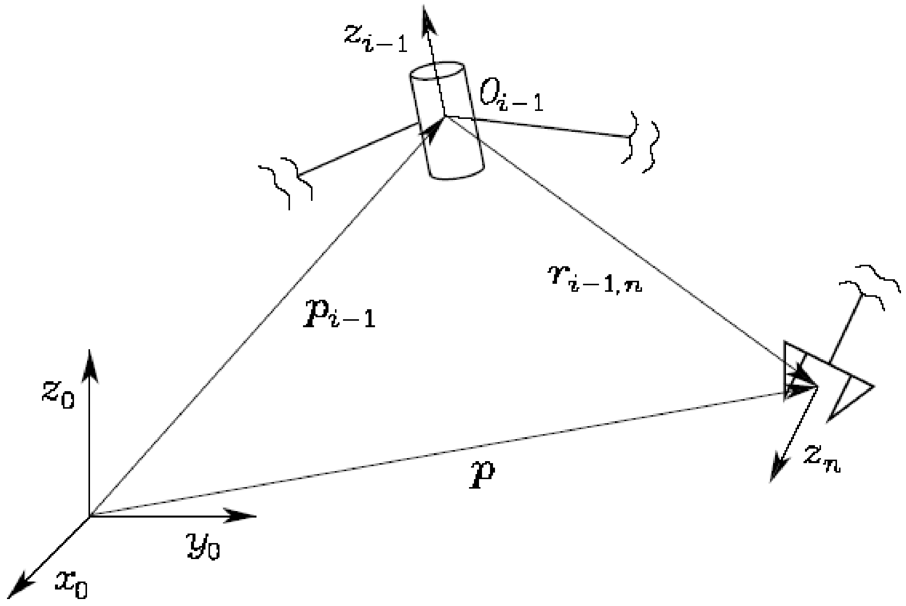
Velocità lineare

Giunto i **prismatico**: un giunto prismatico dà un contributo di velocità lineare lungo il proprio asse di traslazione

$$\dot{q}_i \mathbf{j}_{Pi} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}_{Pi} = \mathbf{z}_{i-1}$$

Giunto i **rotazionale**: un giunto rotazionale dà un contributo di velocità lineare ottenibile con un prodotto vettoriale

$$\dot{q}_i \mathbf{j}_{Pi} = \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,n} =$$
$$= \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1})$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{j}_{Pi} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1})$$



Calcolo dello Jacobiano geometrico

Possiamo quindi calcolare lo Jacobiano geometrico colonna per colonna:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{Pi} \\ \mathbf{j}_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{giunto } i \text{ prismatico} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{giunto } i \text{ rotazionale} \end{cases}$$

Le matrici necessarie per calcolare questi vettori si determinano da relazioni cinematiche dirette:

$$\mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{R}_1^0(q_1) \dots \mathbf{R}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\mathbf{z}_0$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{A}_1^0(q_1) \dots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)\tilde{\mathbf{p}}_0$$

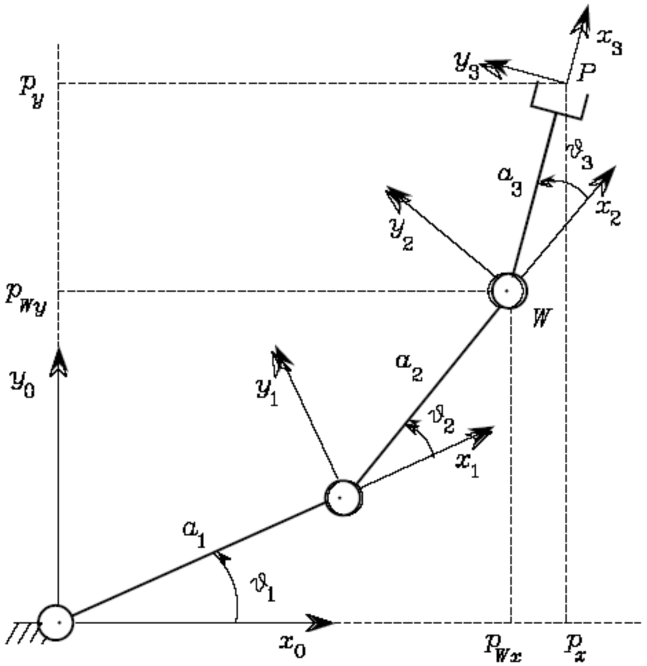
$$\tilde{\mathbf{p}}_{i-1} = \mathbf{A}_1^0(q_1) \dots \mathbf{A}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\tilde{\mathbf{p}}_0$$

dove:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{p}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(coordinate omogenee)

Manipolatore a tre gradi di libertà planare



$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

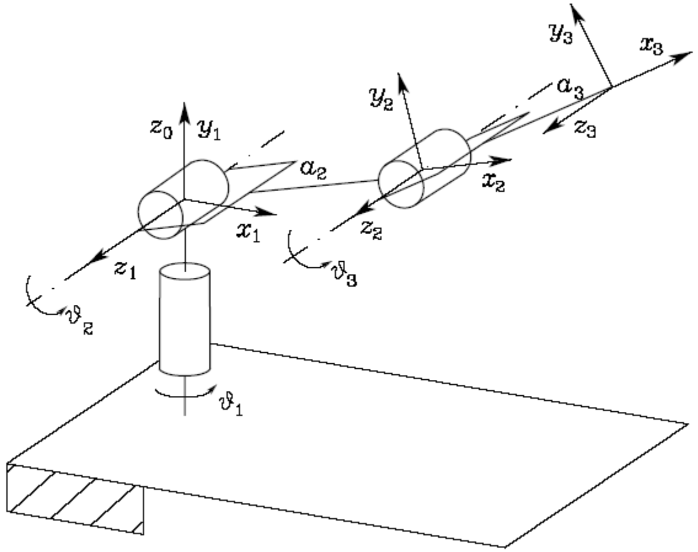
$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

N.B: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$

Manipolatore antropomorfo



$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_2 \\ a_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} & a_3 c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobiano analitico

02

Jacobiano analitico

Torniamo all'equazione cinematica diretta di un manipolatore:

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

dove $\boldsymbol{\phi}$ è una rappresentazione minima dell'orientamento. Differenziando rispetto al tempo otteniamo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

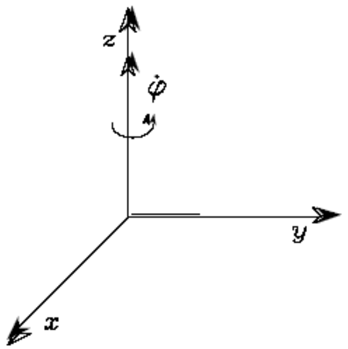
D'altra parte:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial \mathbf{p}(\mathbf{q})/\partial \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ (\partial \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q})/\partial \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

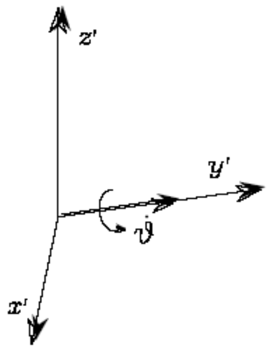
La matrice: $\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$ è chiamata **Jacobiano analitico** del manipolatore.

Legame tra ω e la derivata di ϕ

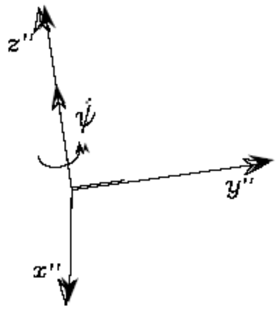
Esprimiamo l'orientamento con gli angoli di Eulero ZYZ, e consideriamo il vettore velocità angolare derivante da ciascuna rotazione elementare:



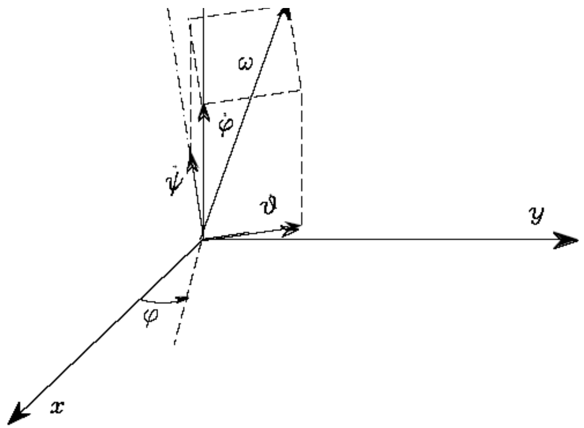
$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\dot{\varphi}$$



$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s_\varphi\\ c_\varphi\\ 0\end{bmatrix}\dot{\vartheta}$$



$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_\varphi s_\vartheta\\ s_\varphi s_\vartheta\\ c_\vartheta\end{bmatrix}\dot{\psi}$$



Componendo le rotazioni elementari:

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}0 & -s_\varphi & c_\varphi s_\vartheta\\ 0 & c_\varphi & s_\varphi s_\vartheta\\ 1 & 0 & c_\vartheta\end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\phi}}=\mathbf{T}(\boldsymbol{\phi})\dot{\boldsymbol{\phi}}$$

con: $$\boldsymbol{\phi}=\begin{bmatrix}\varphi\\ \vartheta\\ \psi\end{bmatrix}$$

analogamente per le altre rappresentazioni minime dell'orientamento

Jacobiano analitico vs geometrico

Il legame tra la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e la derivata del vettore ϕ che esprime l'orientamento è quindi il seguente:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}(\phi)\dot{\phi}$$

Esprimiamo ora la velocità (lineare e angolare) della terna utensile in termini delle derivate di $\mathbf{p}$ e ϕ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{T}(\phi)\dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_A(\phi)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_A(\phi)\mathbf{J}_A\dot{\mathbf{q}} \qquad \text{con:} \quad \mathbf{T}_A(\phi) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\phi) \end{bmatrix}$$

Ne consegue la **relazione tra Jacobiano analitico e geometrico**: $\mathbf{J} = \mathbf{T}_A(\phi)\mathbf{J}_A$

Esprimendo l'orientamento con gli angoli di Eulero ZYZ:

$$\det\big(\mathbf{T}_A(\phi)\big) = \det\big(\mathbf{T}(\phi)\big) = -s_\vartheta$$

Per $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$, la matrice è singolare: si parla in questo caso di **singolarità di rappresentazione**.

Singolarità cinematiche

03

Singolarità cinematiche

Riprendiamo l'equazione che definisce lo Jacobiano geometrico:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

I valori di $\mathbf{q}$ per i quali la matrice $\mathbf{J}$ non è a rango pieno sono chiamati **singolarità cinematiche**.
In una singolarità cinematica abbiamo:

1. Perdita di mobilità (non è possibile imporre leggi di movimento arbitrarie)
2. Possibilità di infinite soluzioni al problema dell'inversione cinematica
3. Alte velocità nello spazio dei giunti (intorno alla singolarità)

Le singolarità possono essere collocate:

1. **Ai confini** dello spazio di lavoro del manipolatore
2. **All'interno** dello spazio di lavoro del manipolatore

Queste ultime sono più problematiche, poiché possono essere incontrate con traiettorie pianificate nello spazio operativo.

Singolarità cinematiche: esempio

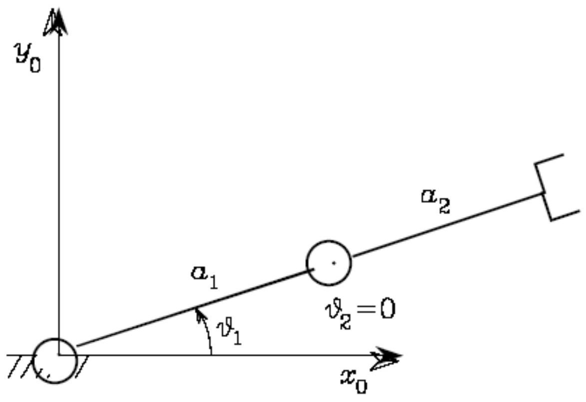
Per un manipolatore a due link lo Jacobiano è:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Possiamo calcolare le singolarità:

$$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 s_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta_2 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

sono singolarità ai confini dello spazio di lavoro.



In queste configurazioni le due colonne dello Jacobiano non sono indipendenti:

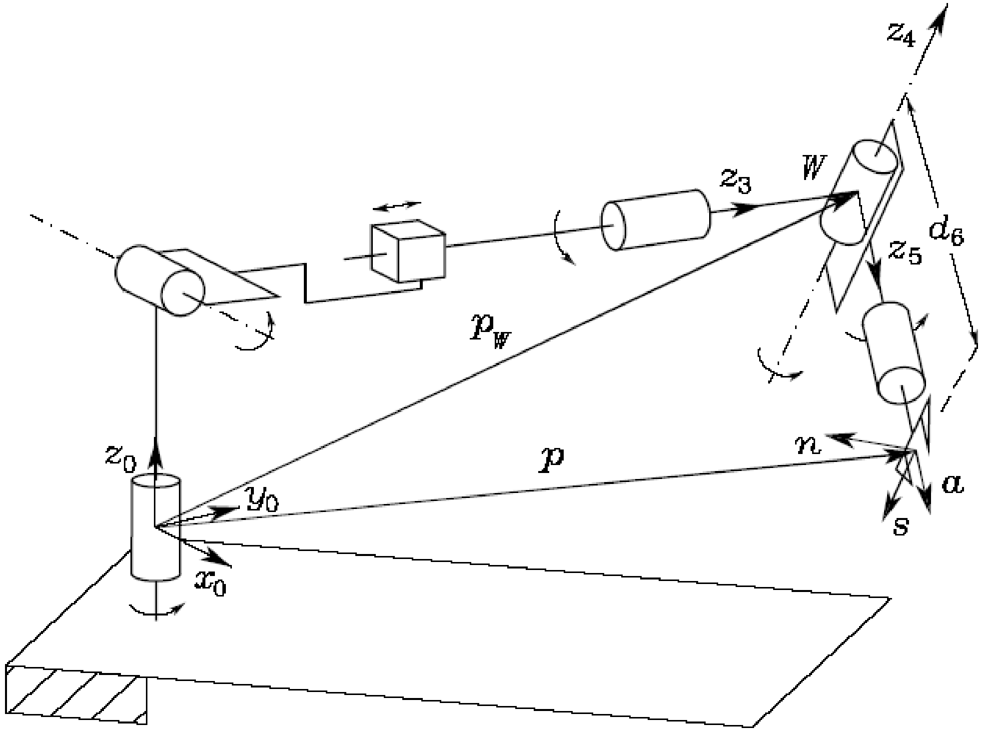
$\vartheta_2 = 0$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_2) s_1 & -a_2 s_1 \\ (a_1 + a_2) c_1 & a_2 c_1 \end{bmatrix}$$

entrambi i giunti producono velocità ortogonali alla retta su cui giacciono i link: perdita di mobilità

Disaccoppiamento di singolarità

Consideriamo un manipolatore con polso sferico:



Articoliamo la ricerca delle singolarità in due sottoproblemi:

1. Calcolo delle singolarità della **struttura portante**
2. Calcolo delle singolarità del **polso**

Disaccoppiamento di singolarità

Consideriamo per semplicità il caso n = 6 e partizioniamo lo Jacobiano: $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix}$

Poiché gli ultimi tre giunti sono tutti di rotazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{12} &= [\mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_3) \quad \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_4) \quad \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_5)] \\ \mathbf{J}_{22} &= [\mathbf{z}_3 \quad \mathbf{z}_4 \quad \mathbf{z}_5] \end{aligned}$$

D'altra parte le singolarità sono caratteristiche della struttura meccanica (e non delle terne). Possiamo pertanto scegliere l'origine della terna che descrive l'orientamento nel centro polso $(\mathbf{p} = \mathbf{p}_W)$. In questo modo $\mathbf{p}_W - \mathbf{p}_i$ sono paralleli a $\mathbf{z}_i$ per $i = 3,4,5$ e quindi:

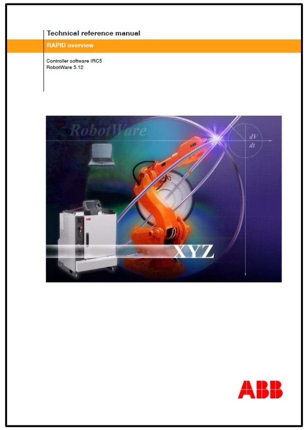
$$\mathbf{J}_{12} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

singolarità di **struttura portante**

$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \det(\mathbf{J}_{11}) = 0 \\ \det(\mathbf{J}_{22}) = 0 \end{cases}$$

singolarità di **polso**

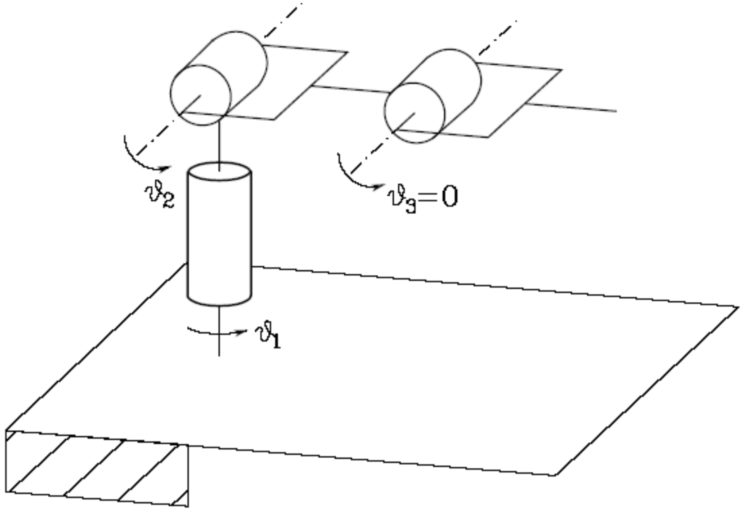
Singolarità di struttura portante: singolarità di gomito

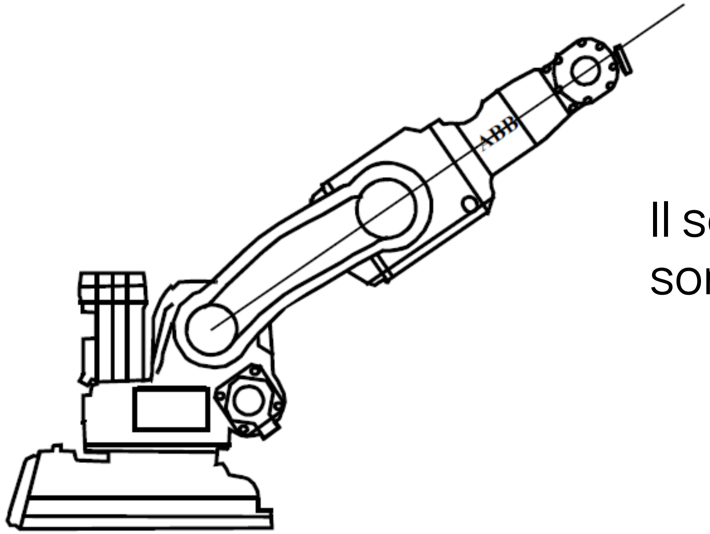


Consideriamo un manipolatore antropomorfo:

$$\det(\mathbf{J}_P) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vartheta_3 = 0,\ \vartheta_3 = \pi & \text{singolarità di gomito} \\ a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0 & \text{singolarità di spalla} \end{cases}$$

Singolarità di gomito



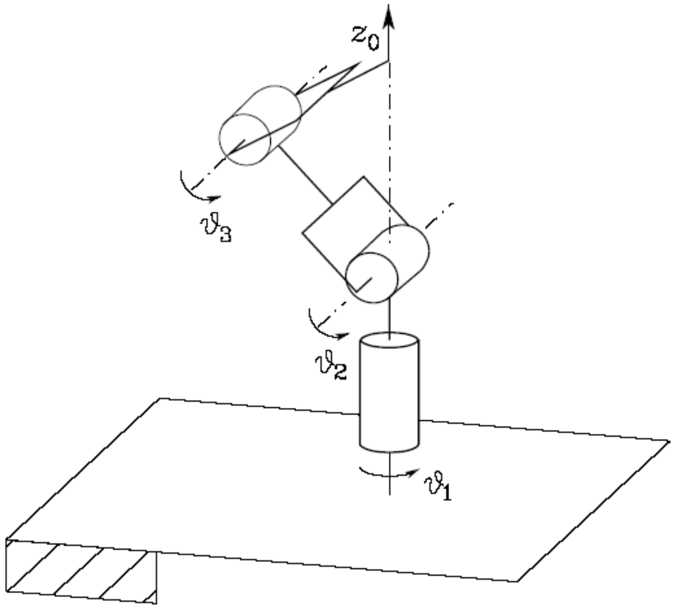


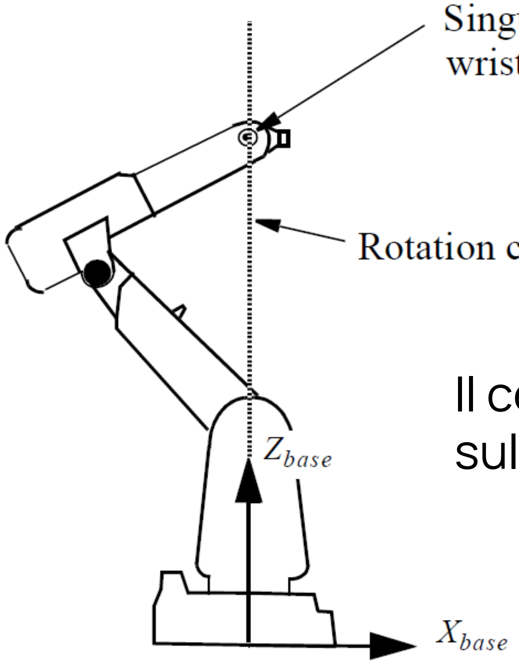
Fonte: ABB

Il secondo e il terzo link sono allineati

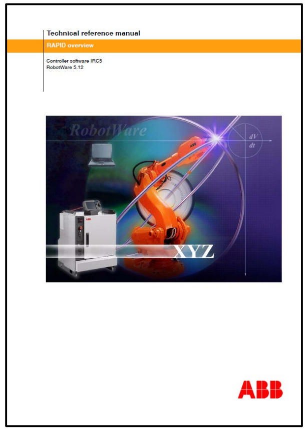
Singolarità di struttura portante: singolarità di spalla

Singolarità di spalla





Fonte: ABB



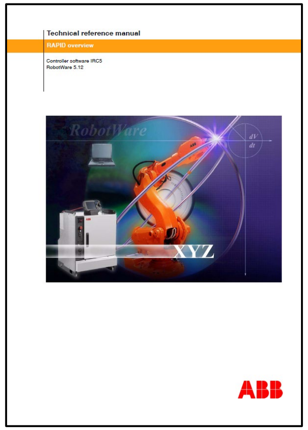
Il centro polso si trova sull'asse del giunto 1

Dalla cinematica diretta:

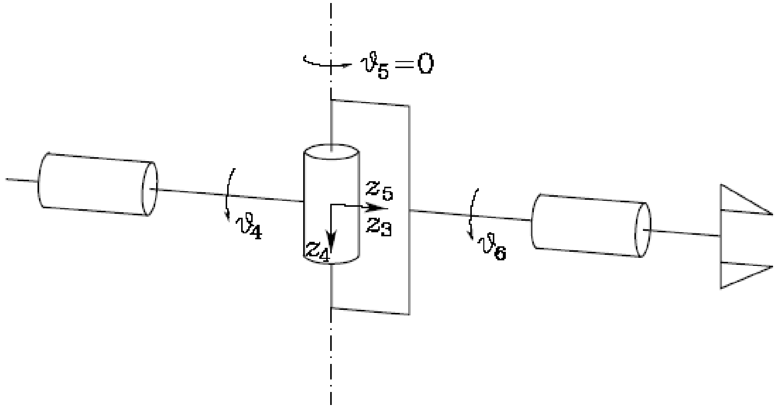
$$p_x = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) = 0$$
$$p_y = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) = 0$$

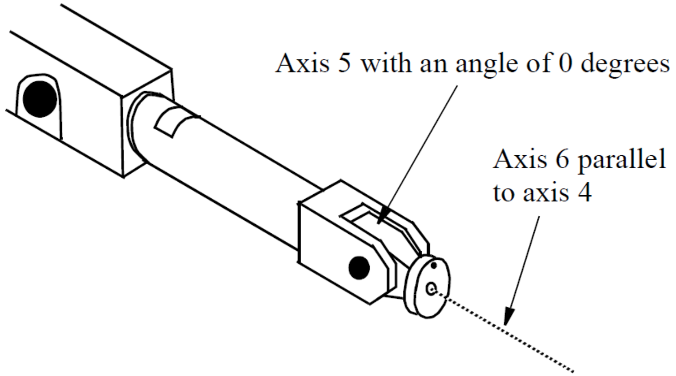
Singolarità di polso

$$\mathbf{J}_{22} = [\mathbf{z}_3 \quad \mathbf{z}_4 \quad \mathbf{z}_5]$$



Lo Jacobiano è singolare se $\mathbf{z}_3$ è parallelo a $\mathbf{z}_5$ ($\vartheta_5 = 0$, $\vartheta_5 = \pi$):

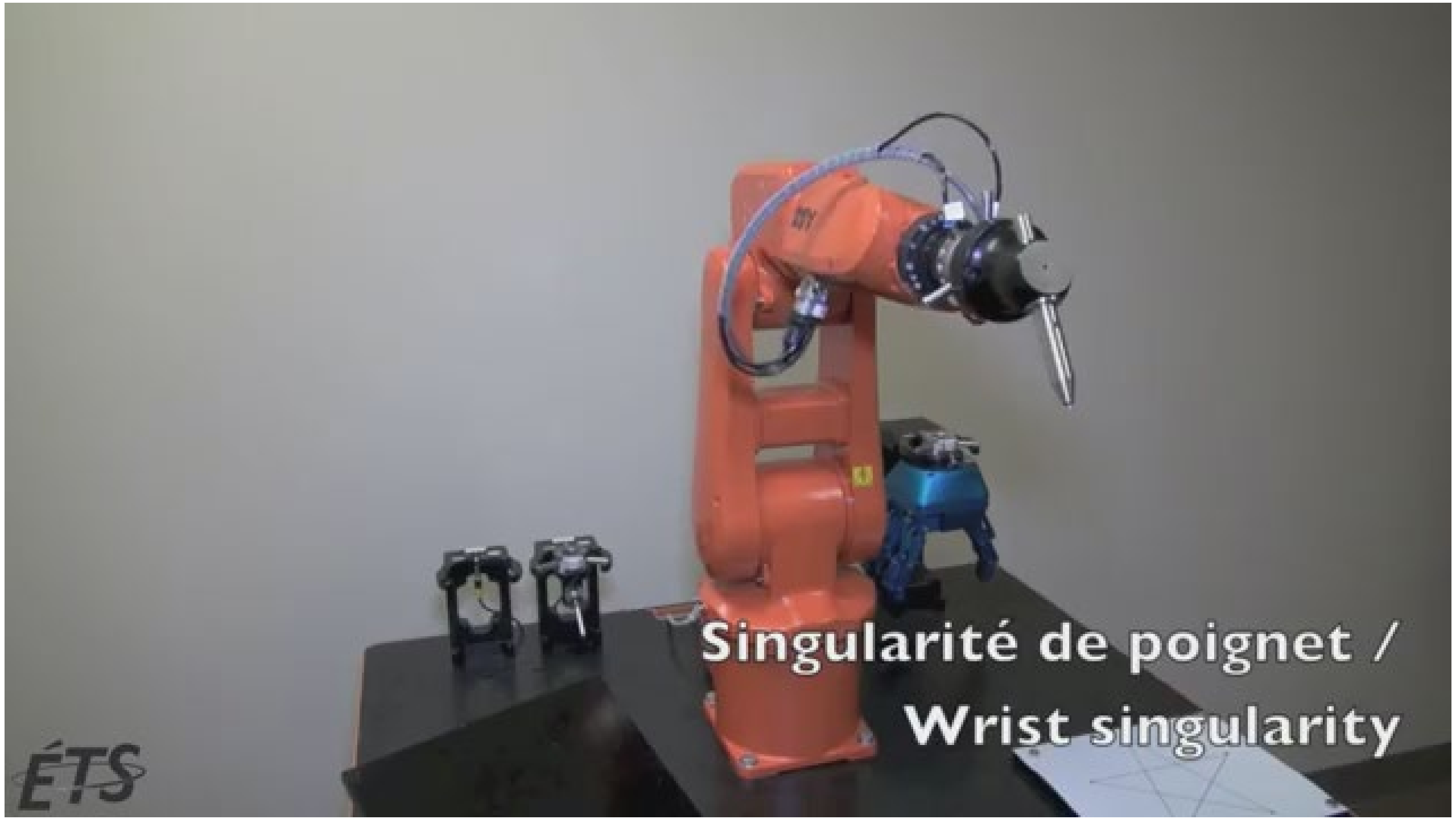




Rotazioni uguali e opposte di ϑ_4 e ϑ_6 non producono alcuna rotazione dell'organo terminale. Inoltre il polso non è in grado di effettuare rotazioni attorno all'asse ortogonale a $\mathbf{z}_3$ e $\mathbf{z}_4$.

È una singolarità difficile da individuare in una pianificazione del moto nello spazio operativo.

Conseguenze delle singolarità cinematiche



POLITECNICO MILANO 1863 | DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Contatti

Paolo Rocco
paolo.rocco@polimi.it