



**POLITECNICO**  
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA  
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Fondamenti di robotica

# Cinematica del robot

09.03.2026 | Paolo Rocco

# Contenuti

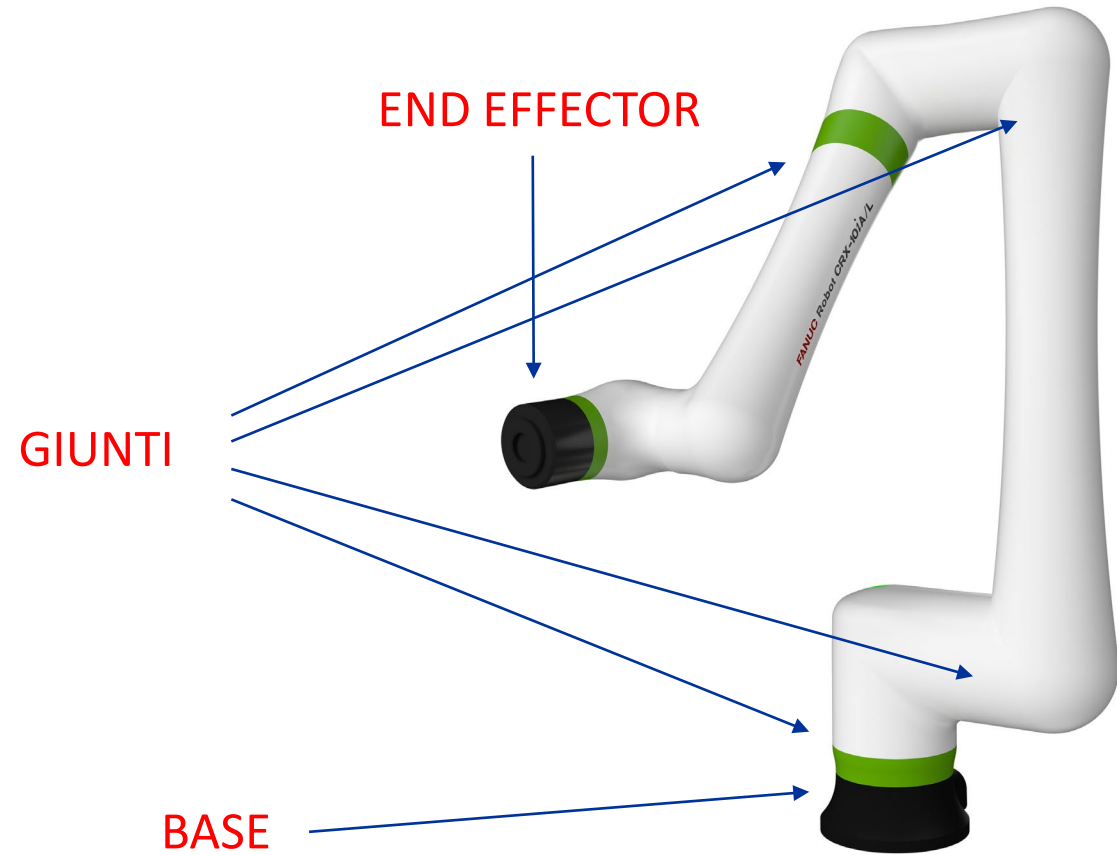
1. Sistemi di riferimento
2. Cinematica diretta
3. Convenzione di Denavit-Hartenberg
4. Cinematica inversa

# Sistemi di riferimento

01

# Introduzione

- La cinematica del robot è lo studio del suo movimento prescindendo dalle cause che lo generano
- Il robot viene visto come una catena di corpi rigidi, dalla base all'end effector, connessi da giunti che consentono un singolo grado di libertà
- La conoscenza del modello cinematico del robot è essenziale nei problemi di pianificazione del moto e controllo



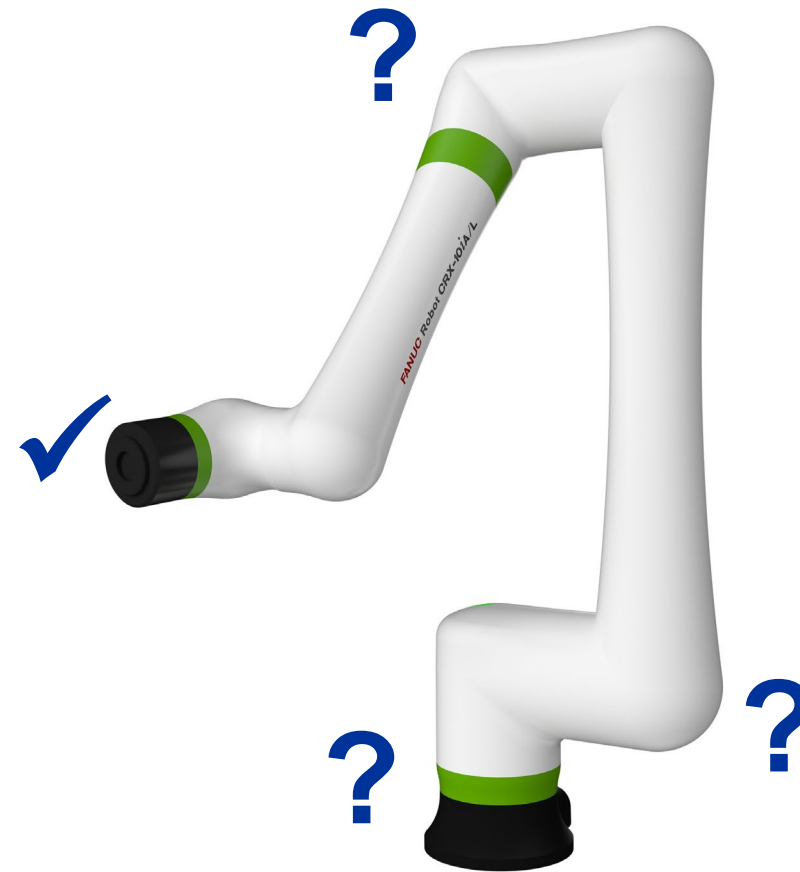
Alcune immagini in queste slide sono prese dal libro di testo:  
B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo:  
*Robotica: modellistica, pianificazione e controllo, 3a Ed.*  
McGraw-Hill Italia, 2008

# Cinematica diretta e inversa

## Cinematica diretta



## Cinematica inversa

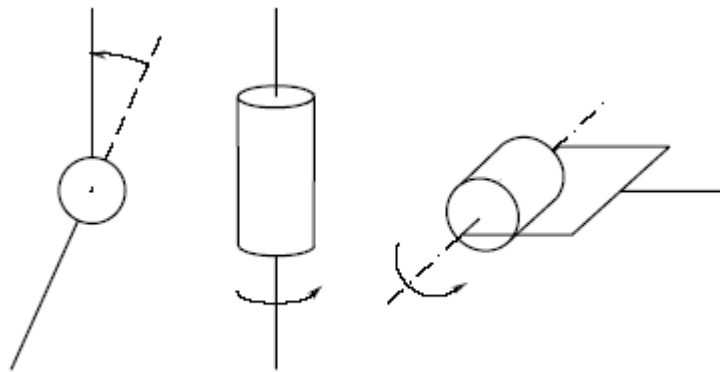


# I giunti

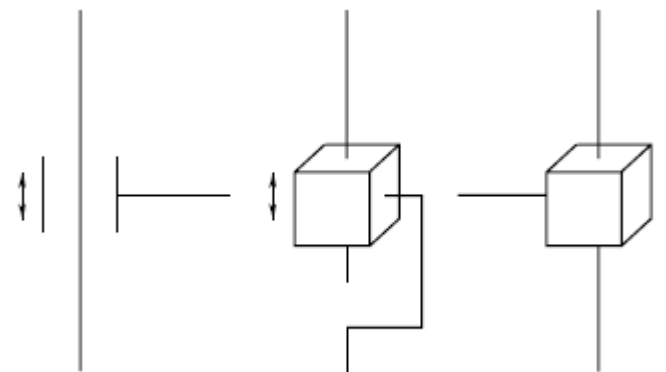
Ogni giunto consente uno (e uno solo) grado di libertà tra due link. Chiamiamo **variabile di giunto** la coordinata associata a tale grado di libertà.

Introduciamo quindi il vettore delle variabili di giunto:  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$

Disegni schematici dei giunti:



**GIUNTI ROTAZIONALI**



**GIUNTI PRISMATICI**

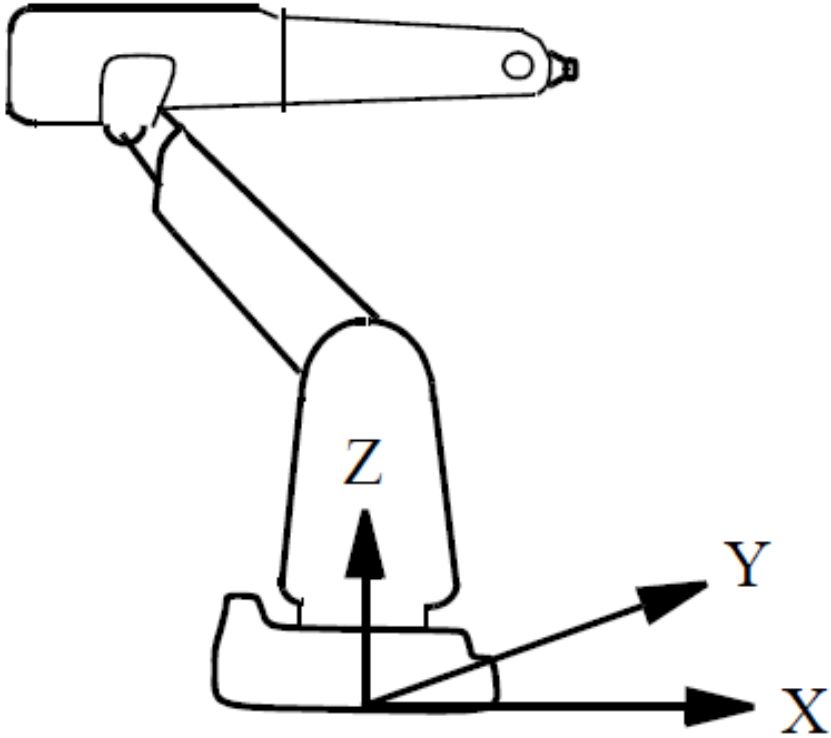
## Il TCP (Tool Center Point)



- L'attività che il robot deve svolgere è solitamente espressa in termini del TCP (**Tool Center Point**).
- Il TCP è normalmente definito come un punto caratteristico dello strumento (tool).
- Assumono rilevanza sia la posizione del TCP sia l'orientamento del tool

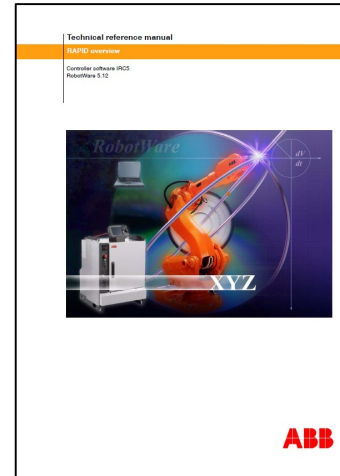
Per facilitare l'analisi, si introducono diversi **sistemi di riferimento** (terne)

## Dal manuale ABB: il sistema di coordinate di base

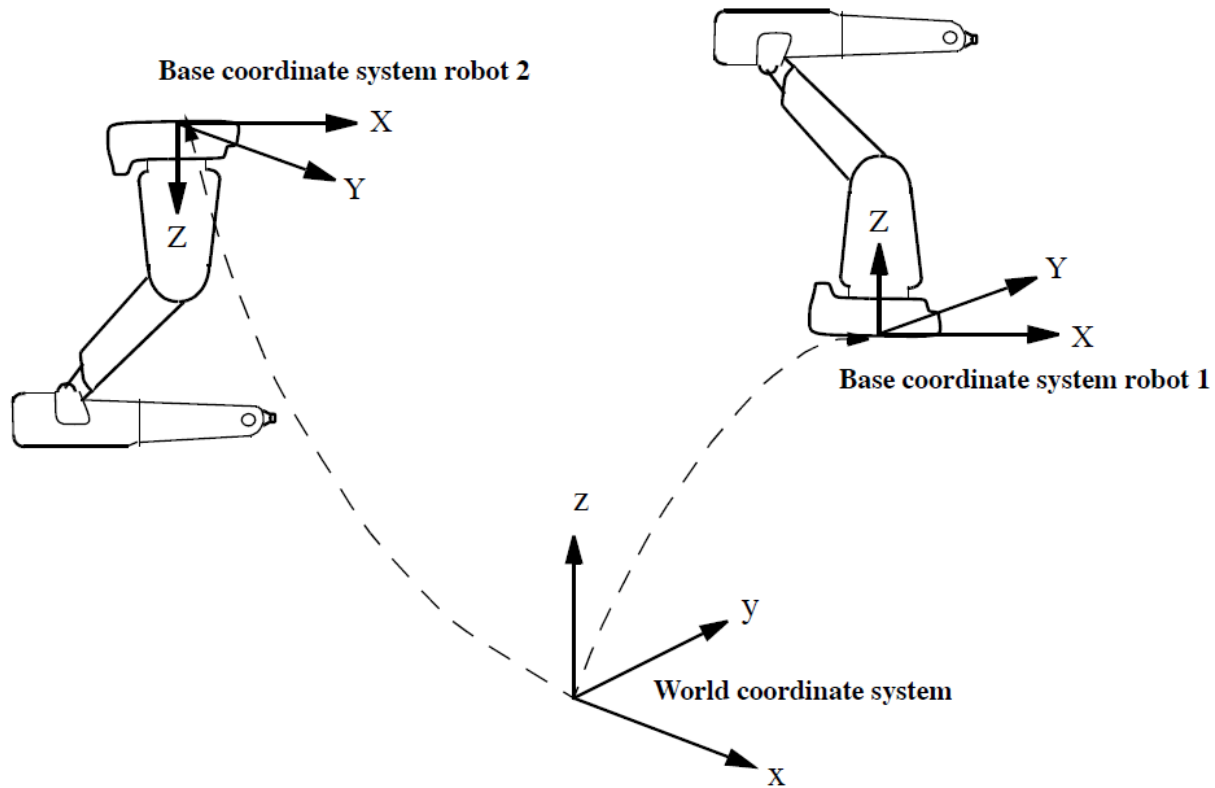


Il **sistema di coordinate di base** si trova sulla base del robot:

- L'origine è situata all'intersezione tra l'asse asse del primo giunto e la piastra di montaggio della base.
- Il piano XY è quello cui appartiene la piastra di montaggio della base.
- L'asse X punta in avanti.
- L'asse Y punta a sinistra (dal punto di vista del robot).
- L'asse Z punta verso l'alto.

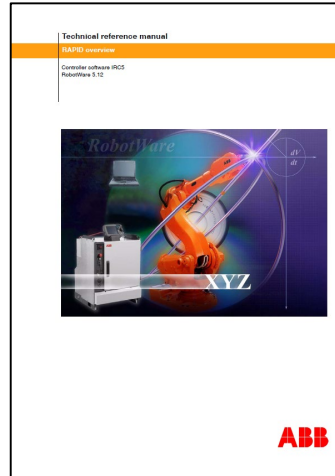


## Dal manuale ABB: il sistema di coordinate mondo

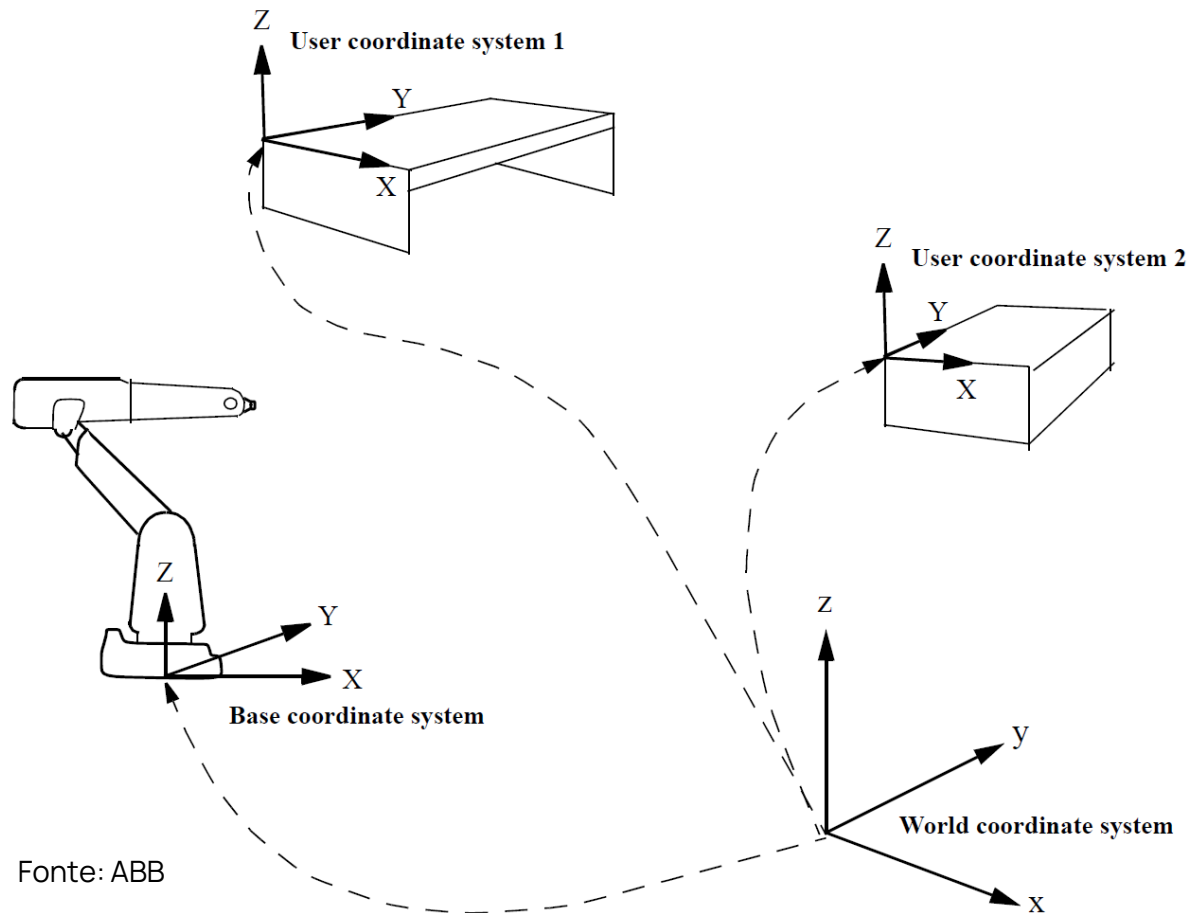


Il **sistema di coordinate mondo** è utile quando ci sono più robot nella cella o quando c'è un solo robot, ma questo robot potrebbe essere ricollocato.

Fare riferimento a un sistema di coordinate mondo semplifica la programmazione dei robot.



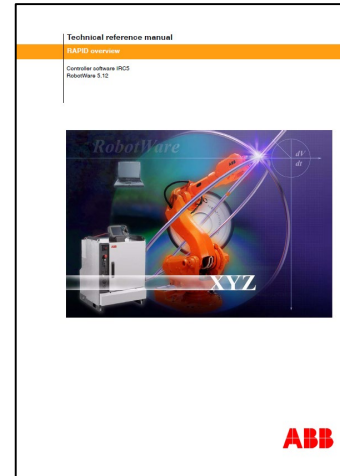
# Dal manuale ABB: il sistema di coordinate dell'utente



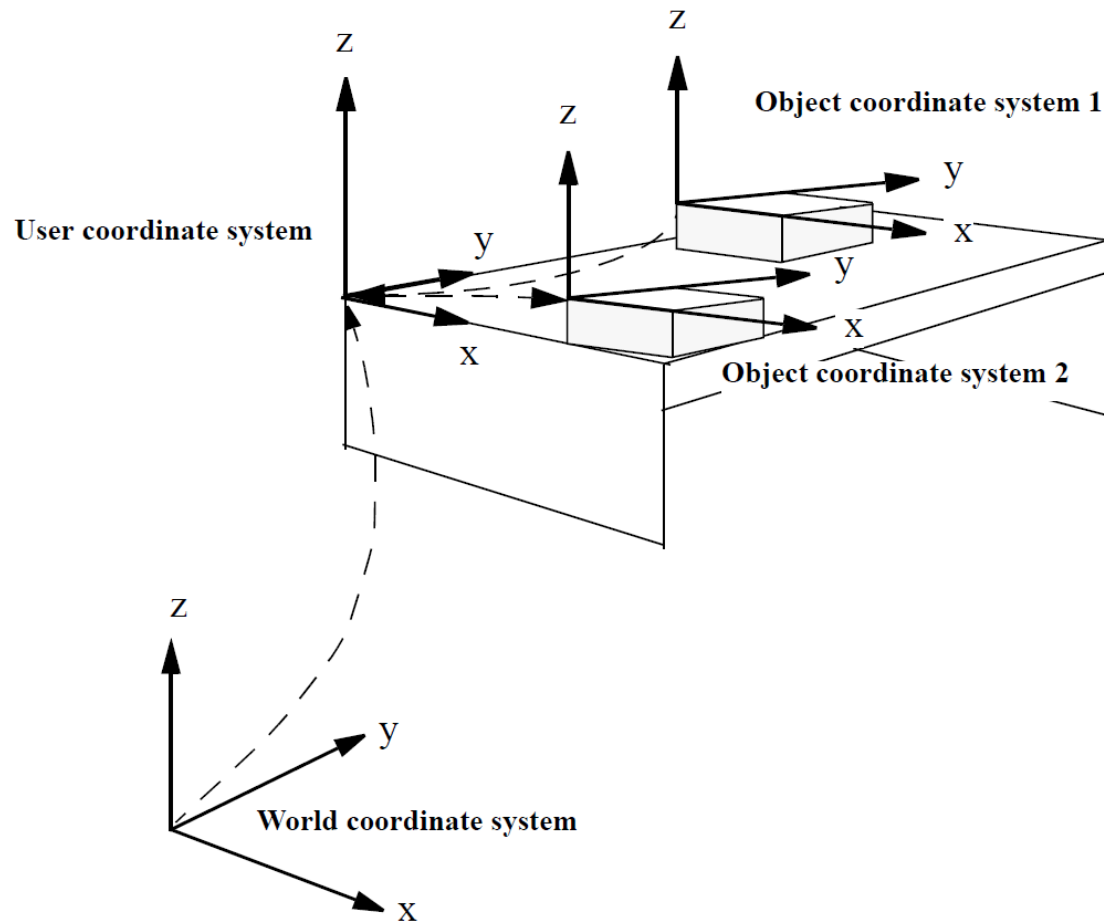
Fonte: ABB

Un **sistema di coordinate utente** può essere associato a una superficie di lavoro.

Se i sistemi di coordinate utente vengono modificati ma gli oggetti sono stati riferiti a tali sistemi, tutte le posizioni programmate seguiranno la superficie di lavoro e non è necessaria alcuna ri-programmazione.



# Dal manuale ABB: il sistema di coordinate dell'oggetto

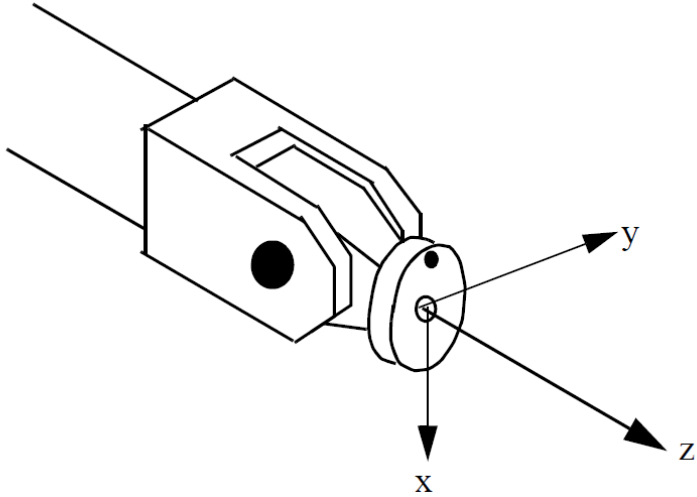


Un **sistema di coordinate dell'oggetto** è associato a un oggetto specifico.

Quando l'oggetto viene spostato o ruotato, fare riferimento al sistema di coordinate dell'oggetto semplifica la programmazione.



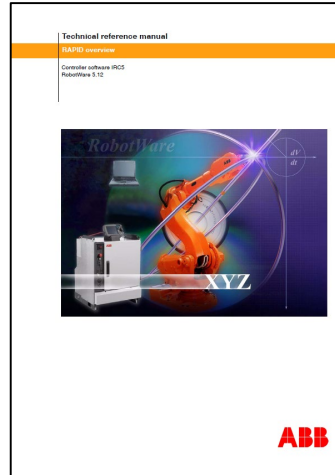
## Dal manuale ABB: il sistema di coordinate del polso (o della flangia)



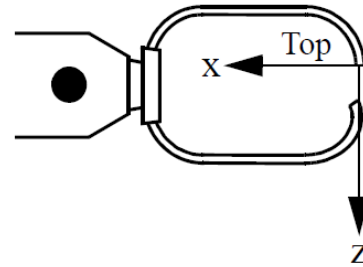
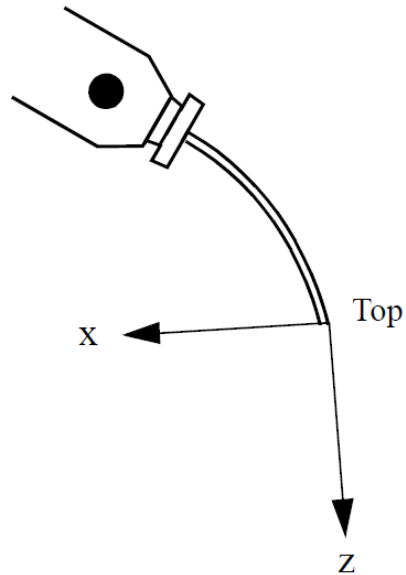
Il **sistema di coordinate del polso (o della flangia)** si trova sulla flangia di montaggio dell'end effector:

- L'origine è situata al centro della flangia di montaggio (sulla superficie di montaggio).
- L'asse z punta verso l'esterno, lungo l'asse del giunto 6.
- L'asse x punta nella direzione opposta al foro di controllo della flangia di montaggio.

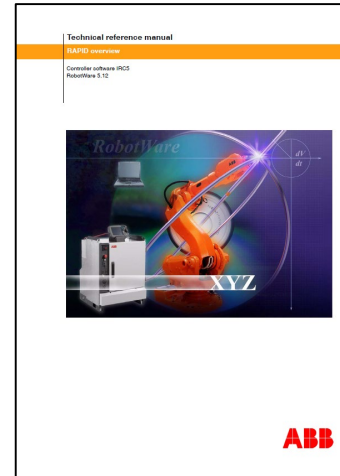
Il sistema di coordinate del polso è sempre lo stesso e non può essere modificato, in quanto è associato alla flangia di montaggio del robot.



## Dal manuale ABB: il sistema di coordinate dell'utensile



Il TCP costituisce l'origine del **sistema di coordinate utensile**, i cui assi sono quelli naturali per la tipologia del tool. Il sistema di riferimento è espresso rispetto al sistema di riferimento della flangia.



# Cinematica diretta

02

# Cinematica diretta

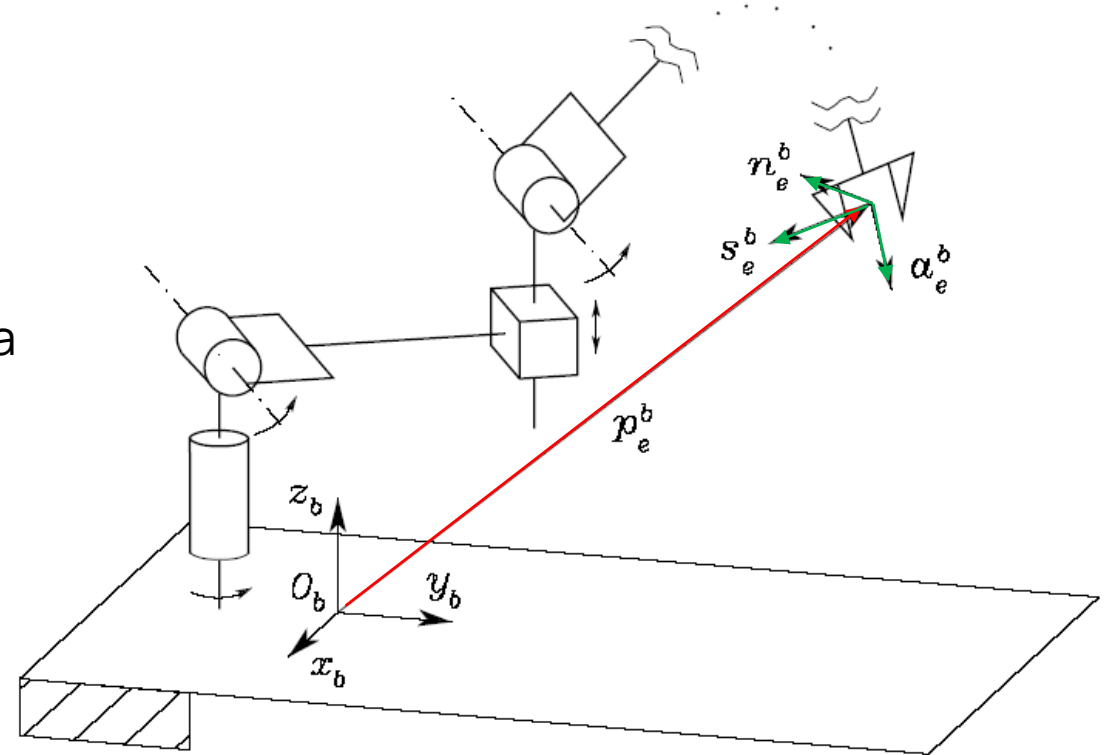


Il problema della **cinematica diretta** consiste nel trovare la posizione e l'orientamento della terna utensile rispetto alla terna base, in funzione delle variabili di giunto.

## Versori della terna utensile

La terna utensile è talvolta definita per mezzo di **tre versori**:

- $\mathbf{a}_e$  (approach): direzione di avvicinamento verso il pezzo
- $\mathbf{s}_e$  (sliding): ortogonale a  $\mathbf{a}_e$  nel piano di apertura della pinza
- $\mathbf{n}_e$  (normal): ortogonale ad entrambi gli altri



$\mathbf{p}_e$  punta all'origine della terna utensile (punto centrale della pinza).

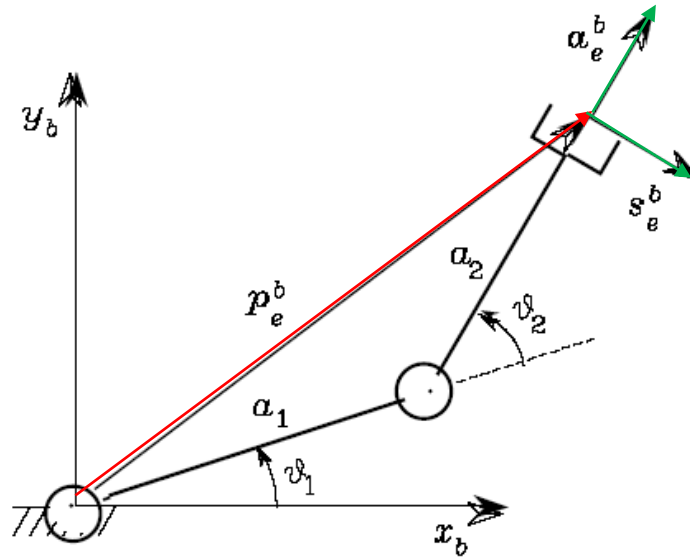
# Cinematica diretta

La **cinematica diretta** può essere espressa attraverso la matrice di trasformazione omogenea della terna utensile rispetto alla terna di base.

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{a}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{matrice di trasformazione omogenea})$$

Esempio: manipolatore planare a due link

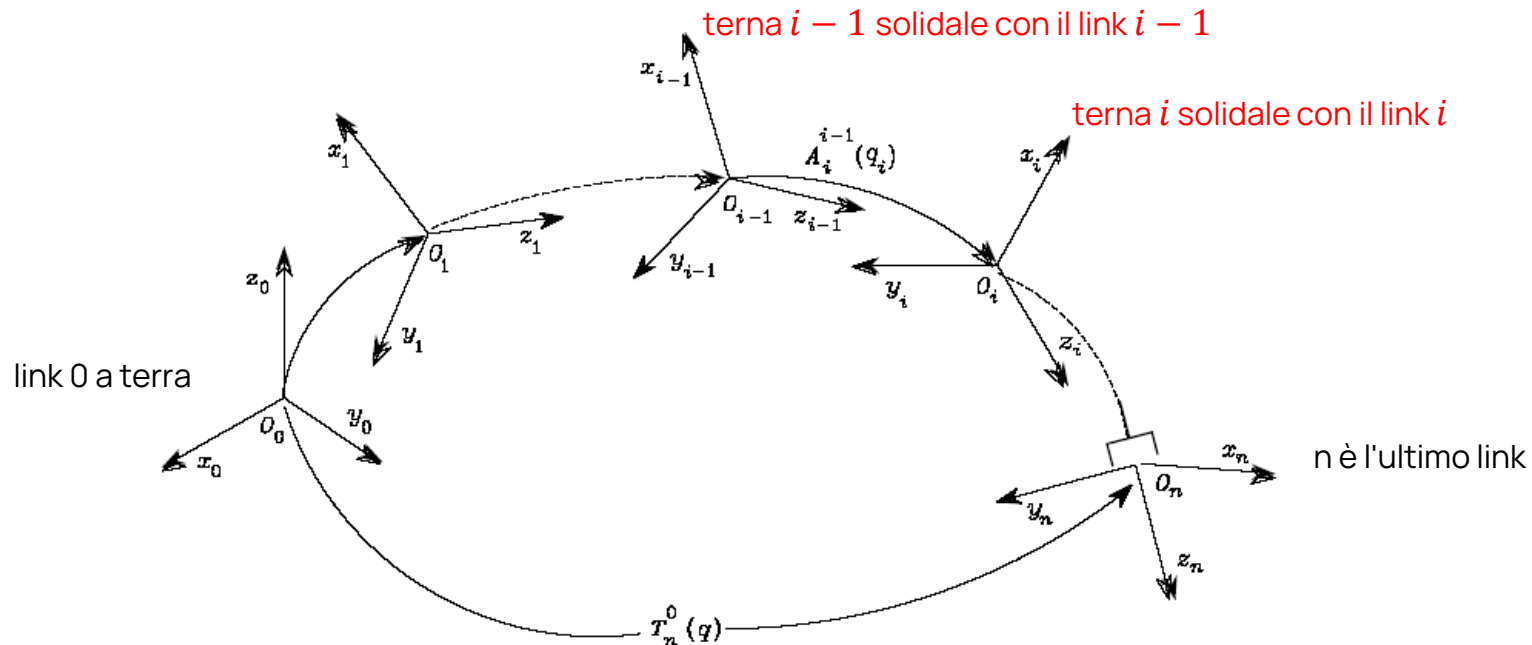
$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} c_1 &= \cos(\vartheta_1) \\ s_1 &= \sin(\vartheta_1) \\ c_{12} &= \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ s_{12} &= \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

# Cinematica diretta

Per procedere in modo sistematico al calcolo della cinematica diretta, è necessario **associare un sistema di riferimento a ciascun link**:



Procedendo in modo iterativo:

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1)\mathbf{A}_2^1(q_2) \dots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)$$

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b \mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) \mathbf{T}_e^n$$

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i)$$

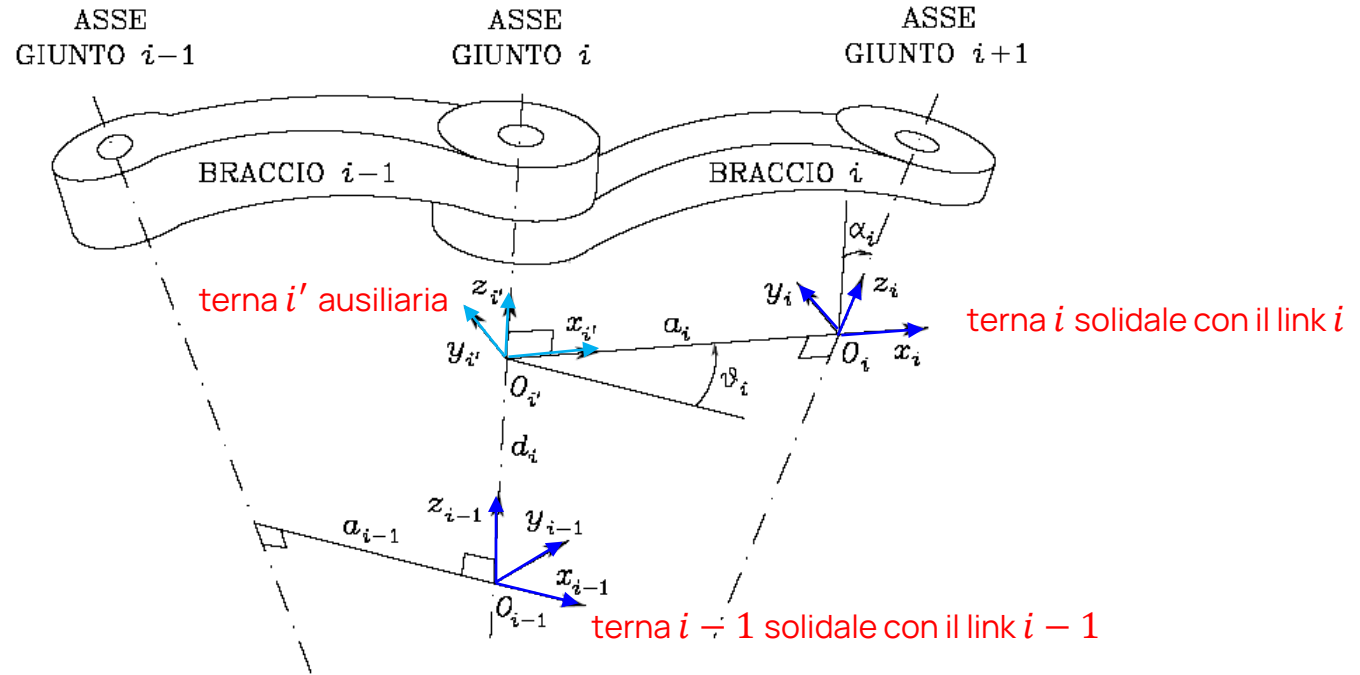
- È la matrice di trasformazione omogenea del sistema di riferimento  $i$  rispetto al sistema  $i - 1$
- Dipende solo dalla coordinata di giunto  $q_i$
- **Come posizionare i sistemi di riferimento?**

# Convenzione di Denavit-Hartenberg

03

# Convenzione di Denavit-Hartenberg

Si tratta di una **convenzione** per la selezione dei sistemi di riferimento associati ad ogni link.



- $z_i$  si trova lungo l'asse di giunto  $i + 1$ , con orientamento arbitrario
- $O_i$  è all'intersezione dell'asse  $z_i$  con la normale comune agli assi  $z_i$  e  $z_{i-1}$ ; denotiamo con  $O'_i$  l'intersezione di questa normale comune con l'asse  $z_{i-1}$
- $x_i$  è allineato con la normale comune agli assi  $z_i$  e  $z_{i-1}$ , con orientamento positivo dal giunto  $i$  al giunto  $i + 1$
- $y_i$  completa una terna destrorsa

## Convenzione di Denavit-Hartenberg: casi particolari

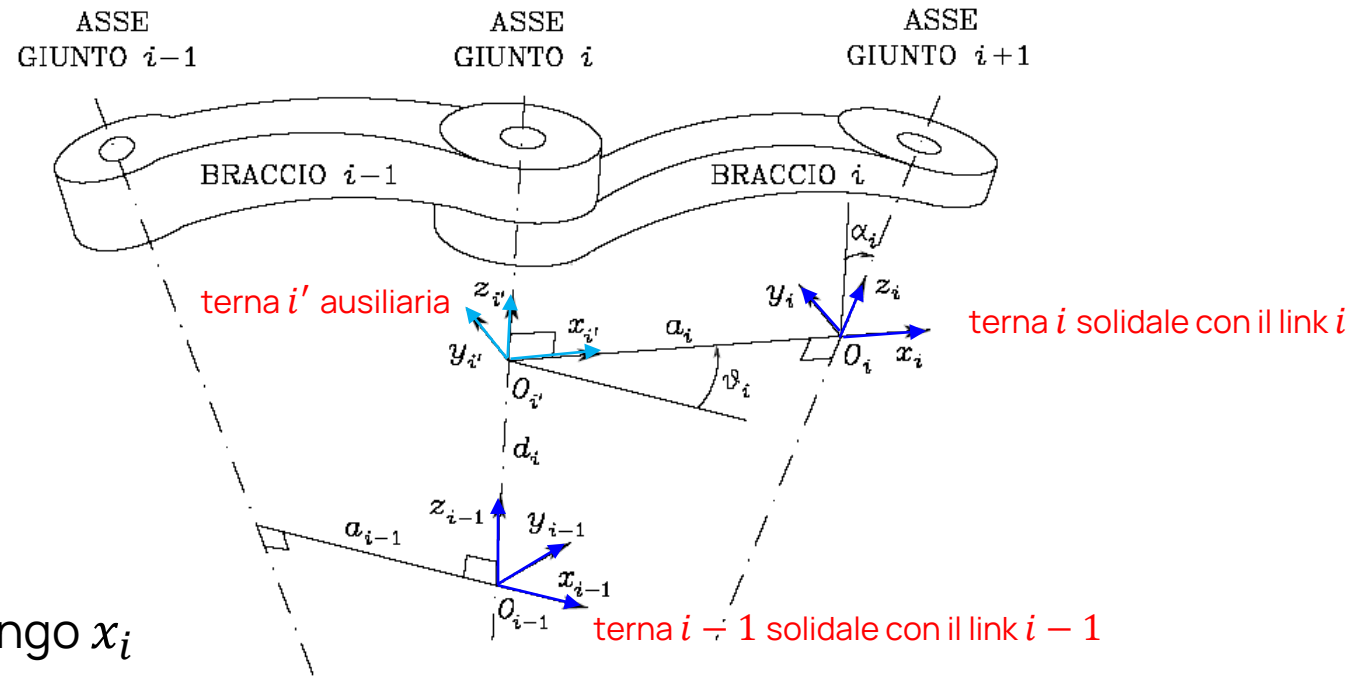
Vi sono alcuni casi in cui la terna non è univocamente definita:

- Nella terna 0 solo la direzione di  $z_0$  è specificata: si possono scegliere arbitrariamente origine ed asse  $x_0$
- Nella terna  $n$  è specificato solo l'asse  $x_n$  che deve essere normale a  $z_{n-1}$
- Quando due assi consecutivi sono paralleli la normale comune non è univocamente definita
- Quando due assi consecutivi coincidono la normale comune può essere scelta arbitrariamente

L'indeterminazione può essere usata per semplificare la procedura.

# Parametri di Denavit-Hartenberg

Per definire sistema di riferimento rispetto al precedente, sono necessari **4 parametri**.



- $a_i$  distanza di  $O_i$  da  $O'_i$  misurata lungo  $x_i$
- $d_i$  coordinata su  $z_{i-1}$  di  $O'_i$
- $\alpha_i$  angolo attorno all'asse  $x_i$  tra l'asse  $z_{i-1}$  e l'asse  $z_i$  considerato positivo in senso antiorario
- $\vartheta_i$  angolo attorno all'asse  $z_{i-1}$  tra l'asse  $x_{i-1}$  e l'asse  $x_i$  considerato positivo in senso antiorario

$a_i$  e  $\alpha_i$  sono sempre costanti, uno tra  $\vartheta_i$  e  $d_i$  è variabile

# Il metodo di Denavit-Hartenberg illustrato



<https://www.youtube.com/watch?v=rA9tm0gTln8>

## Matrice di trasformazione omogenea

Come creare la **matrice di trasformazione** dal sistema  $i - 1$  al sistema  $i$ ?

- I) Al fine di sovrapporre la terna  $i - 1$  alla terna  $i'$  trasliamo la terna lungo l'asse  $z_{i-1}$  per una lunghezza  $d_i$  ruotando di un angolo  $\vartheta_i$  attorno a  $z_{i-1}$ :

$$\mathbf{A}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- II) Al fine di sovrapporre la terna  $i'$  alla terna  $i$  trasliamo la terna lungo l'asse  $x_i'$  per una lunghezza  $a_i$ , ruotando di un angolo  $\alpha_i$  attorno a  $x_i'$ :

$$\mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Otteniamo la matrice dal sistema  $i - 1$  al sistema  $i$  **moltiplicando le due matrici parziali**:

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \mathbf{A}_{i'}^{i-1} \mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Spazio dei giunti e spazio operativo

Lo **spazio dei giunti** è definito dal vettore delle variabili di giunto:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} q_i = \vartheta_i \text{ (giunto rotoidale)} \\ q_i = d_i \text{ (giunto prismatico)} \end{array}$$

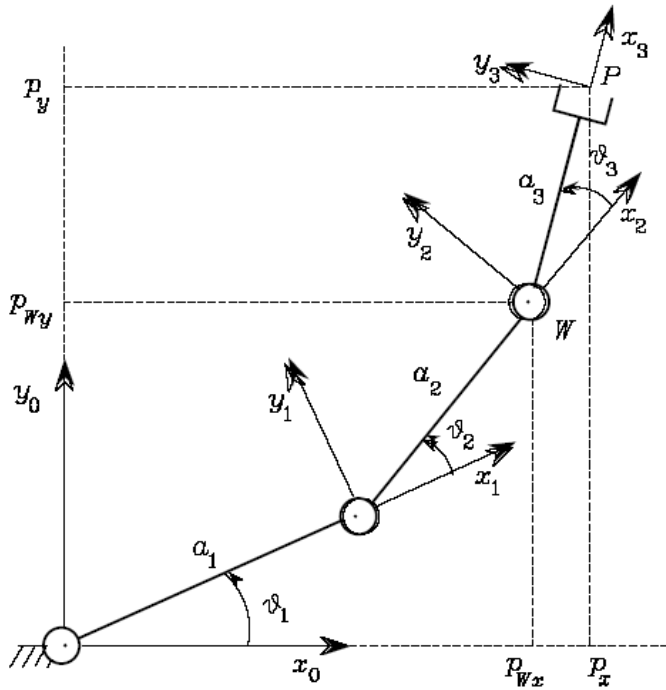
Lo **spazio operativo** è lo spazio in cui viene specificata l'attività che il manipolatore deve svolgere. È definito dalla postura  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p} \text{ (posizione)} \\ \phi \text{ (rappresentazione minima dell'orientamento)} \end{array}$$

$m$  componenti

Relazione cinematica diretta:  $\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q})$

# Manipolatore planare a tre gradi di libertà



	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	$a_1$	0	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$

rosso: variabili di giunto

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_i = \cos(\vartheta_i)$$

$$s_i = \sin(\vartheta_i)$$

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo definire l'orientamento con l'angolo  $\varphi$  formato dall'end effector (vettore  $x_3$ ) con l'asse  $x_0$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

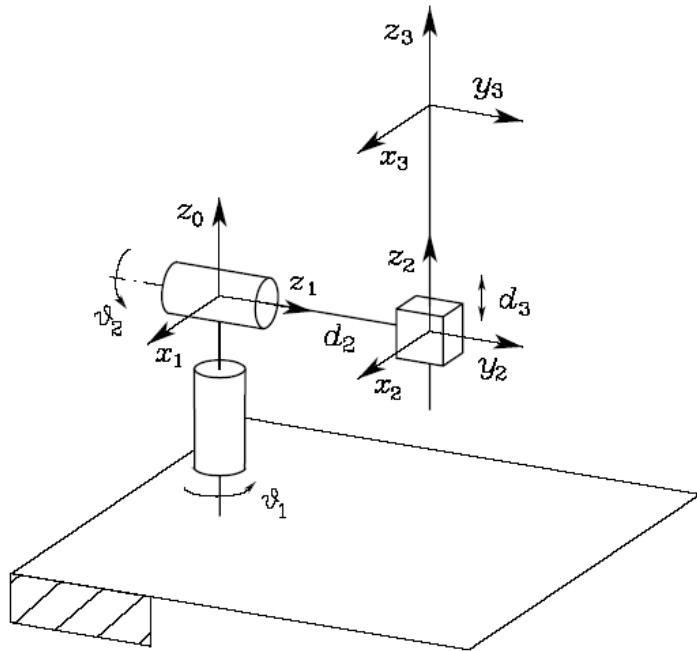
$$c_{12} = \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

$$s_{12} = \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

$$c_{123} = \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3)$$

$$s_{123} = \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3)$$

# Manipolatore sferico



	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\vartheta_1$
2	0	$\frac{\pi}{2}$	$d_2$	$\vartheta_2$
3	0	0	$d_3$	0

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

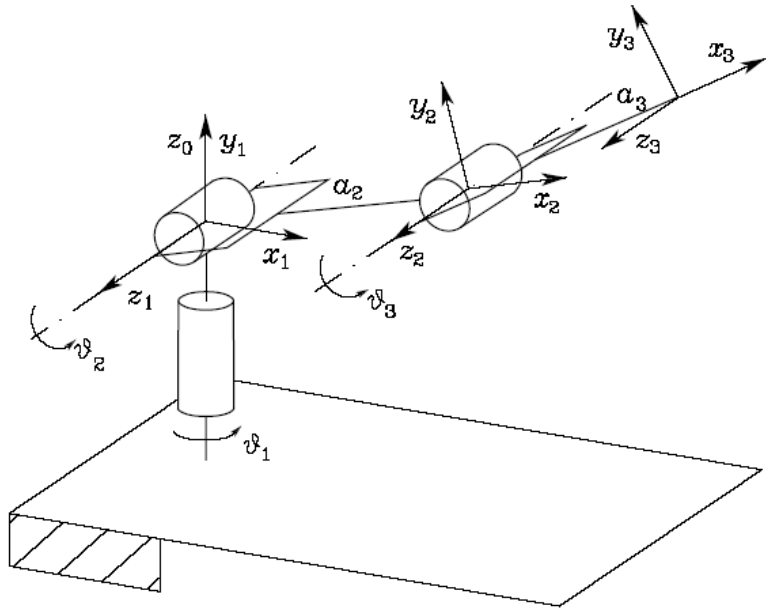
$$\mathbf{A}_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna  
utensile  
coincide con la  
terna 3

# Manipolatore antropomorfo



	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

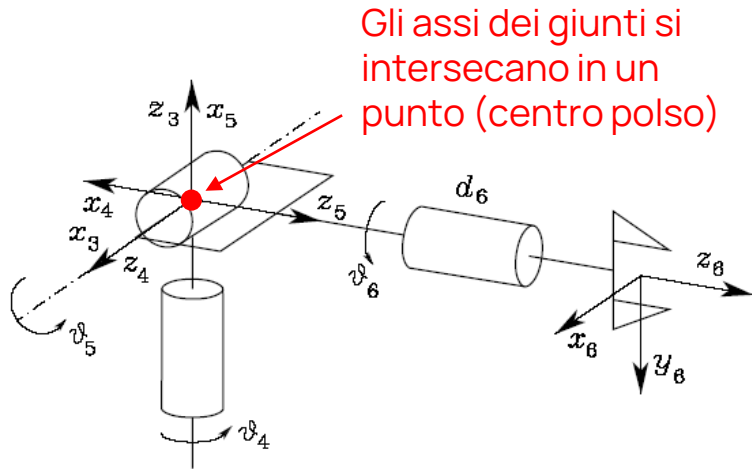
$$\mathbf{A}_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile non coincide con la terna 3

# Polso sferico



	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\vartheta_4$
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\vartheta_5$
6	0	0	$d_6$	$\vartheta_6$

$$\mathbf{A}_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

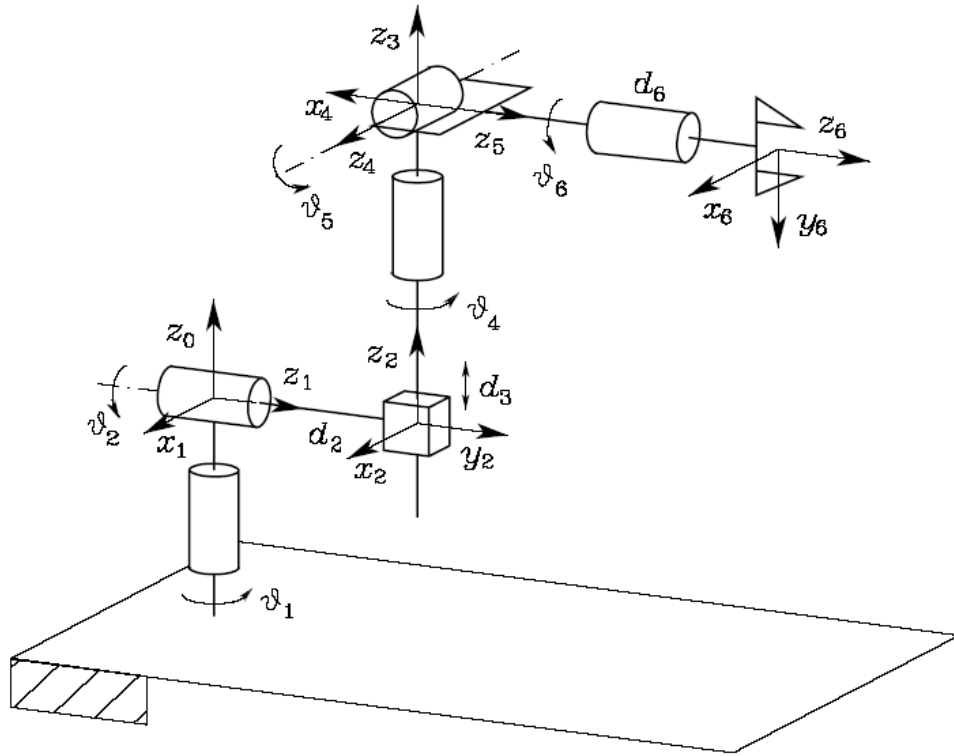
$\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$  sono gli angoli di Eulero ZYZ della terna 6 rispetto alla 3

$$\mathbf{T}_6^3 = \mathbf{A}_4^3 \mathbf{A}_5^4 \mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna  
utensile  
coincide con la  
terna 6

# Manipolatore di Stanford

Il manipolatore di Stanford è un manipolatore sferico con polso sferico



	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\vartheta_1$
2	0	$\frac{\pi}{2}$	$d_2$	$\vartheta_2$
3	0	0	$d_3$	0
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\vartheta_4$
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\vartheta_5$
6	0	0	$d_6$	$\vartheta_6$

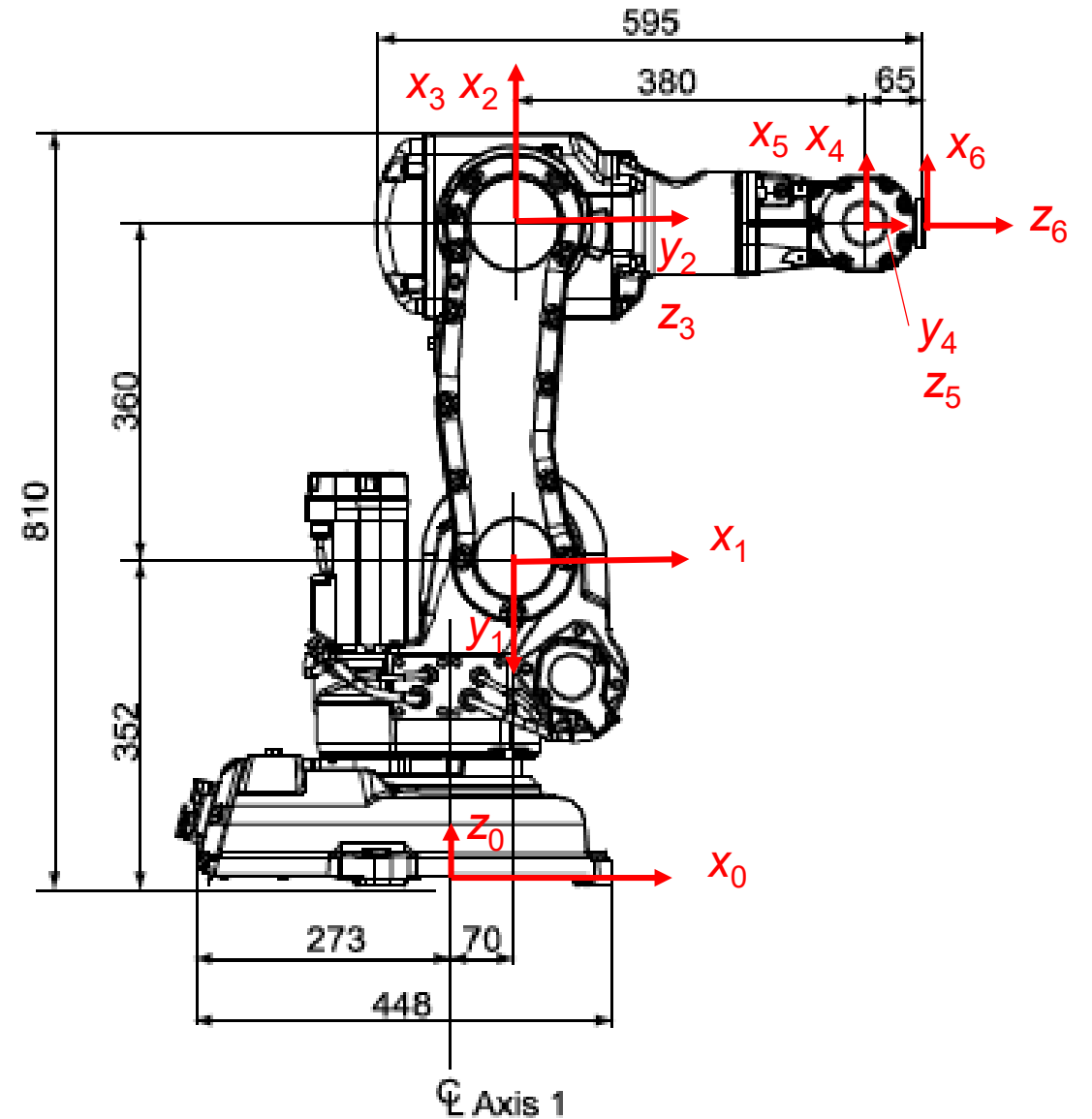
$$\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_6^3$$

Già calcolata per il polso sferico

Già calcolata per il manipolatore sferico

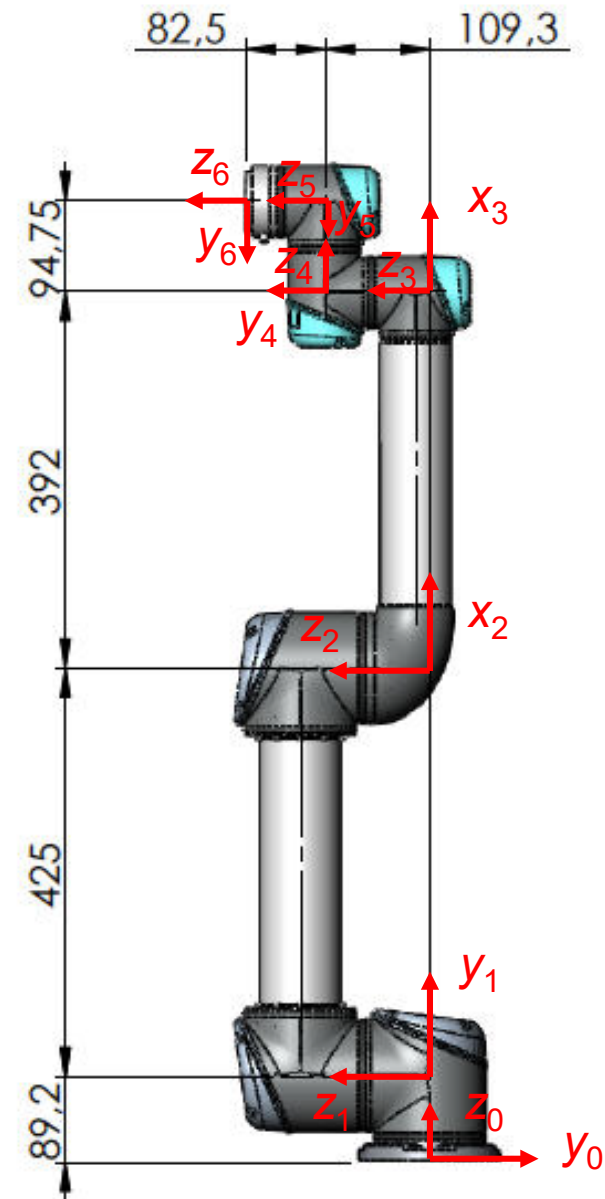
# Un robot industriale a sei gradi libertà

	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0.07	$-\frac{\pi}{2}$	0.352	$\vartheta_1$
2	0.36	0	0	$\vartheta_2$
3	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\vartheta_3$
4	0	$\frac{\pi}{2}$	0.38	$\vartheta_4$
5	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\vartheta_5$
6	0	0	0.065	$\vartheta_6$



# Un robot collaborativo a sei gradi libertà

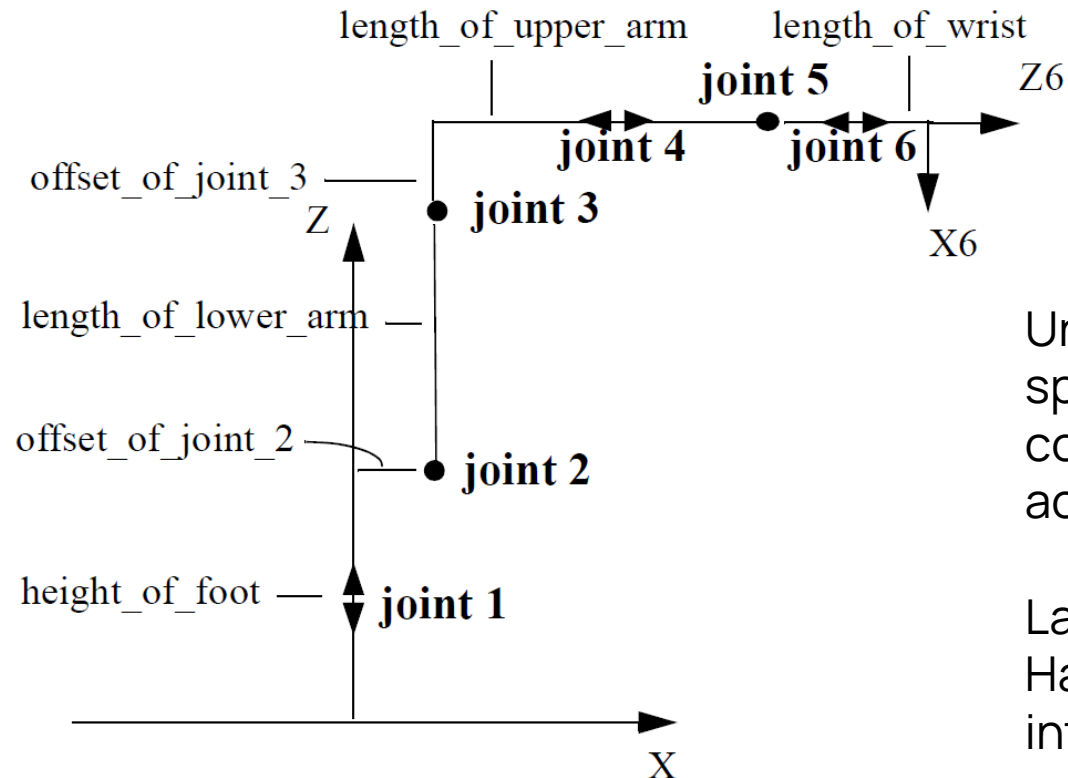
	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$\frac{\pi}{2}$	0.089	$\vartheta_1$
2	0.425	0	0	$\vartheta_2$
3	0.392	0	0	$\vartheta_3$
4	0	$\frac{\pi}{2}$	0.109	$\vartheta_4$
5	0	$-\frac{\pi}{2}$	0.094	$\vartheta_5$
6	0	0	0.082	$\vartheta_6$



## Dal manuale ABB: modello cinematico

I **manuali dei robot** di solito non danno il modello cinematico in termini di parametri di Denavit-Hartenberg, ma in modo semplificato.

Ecco un esempio:



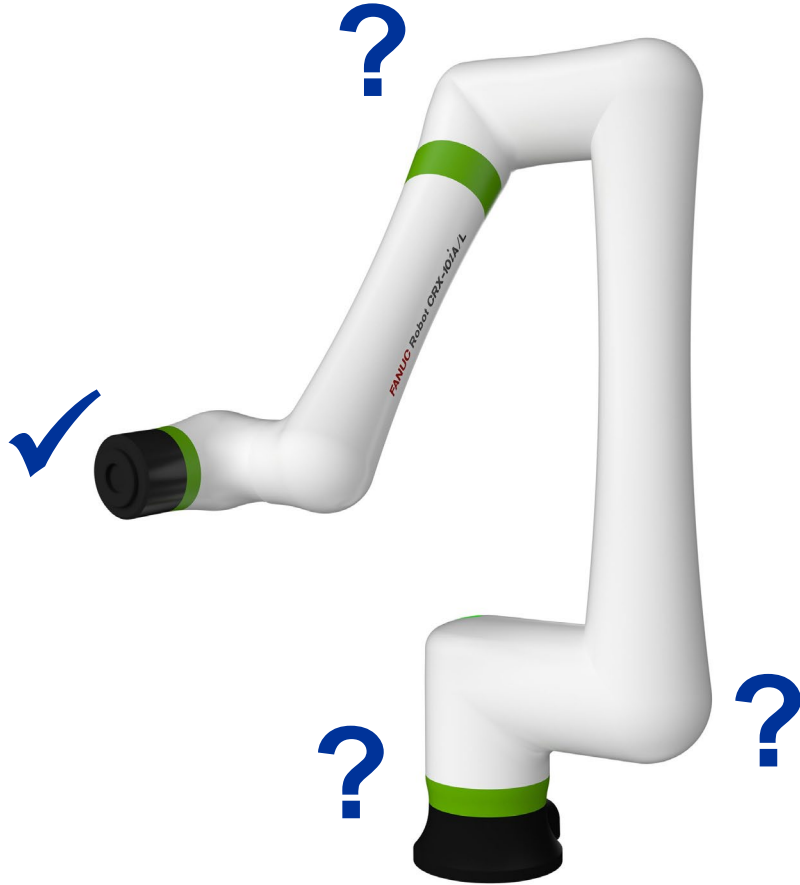
Una descrizione come questa è specifica di questo robot e può essere compresa solo con uno schizzo di accompagnamento.

La rappresentazione di Denavit-Hartenberg è universale e può essere intesa così com'è.

# Cinematica inversa

04

# Problema della cinematica inversa



Il problema della **cinematica inversa** consiste nel determinare le variabili di giunto date la posizione e l'orientamento della terna utensile rispetto alla terna di base.

## Problema della cinematica inversa

$$\mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{q}$$

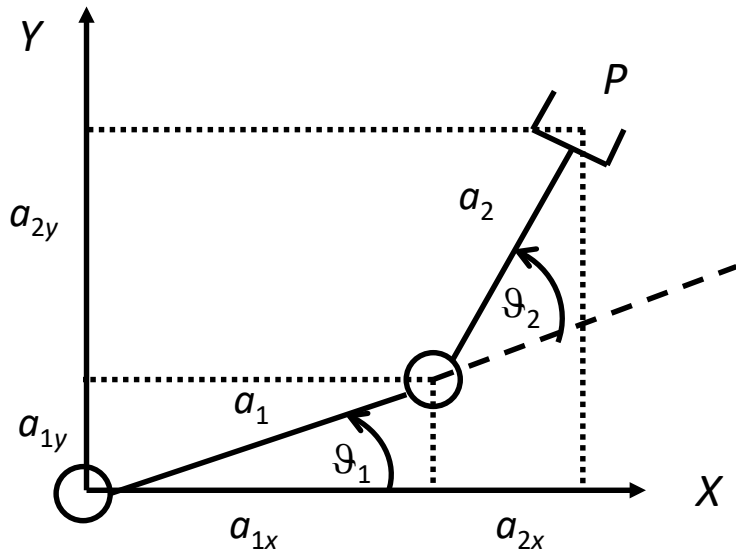
$$\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{q}$$

La posizione e l'orientamento della terna utensile possono essere date o con la matrice di trasformazione o con le coordinate nello spazio operativo. In entrambi i casi, il problema è trovare le variabili di giunto corrispondenti.

- Il problema potrebbe non ammettere soluzioni (se la posizione e l'orientamento non appartengono allo spazio di lavoro del manipolatore)
- La soluzione analitica (in forma chiusa) potrebbe non esistere. In questo caso vengono utilizzate tecniche numeriche
- Potrebbero esistere soluzioni multiple o un numero infinito di soluzioni

In generale la soluzione si trova **senza una procedura sistematica**, piuttosto basandosi sull'intuizione nel manipolare le equazioni.

# Manipolatore planare a due gradi di libertà



$$p_x = a_{1x} + a_{2x} = a_1 \cos(\vartheta_1) + a_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

$$p_y = a_{1y} + a_{2y} = a_1 \sin(\vartheta_1) + a_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

Quadrando e sommando:

$$c_2 = \frac{p_x^2 + p_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

$$\Rightarrow \vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

2 soluzioni

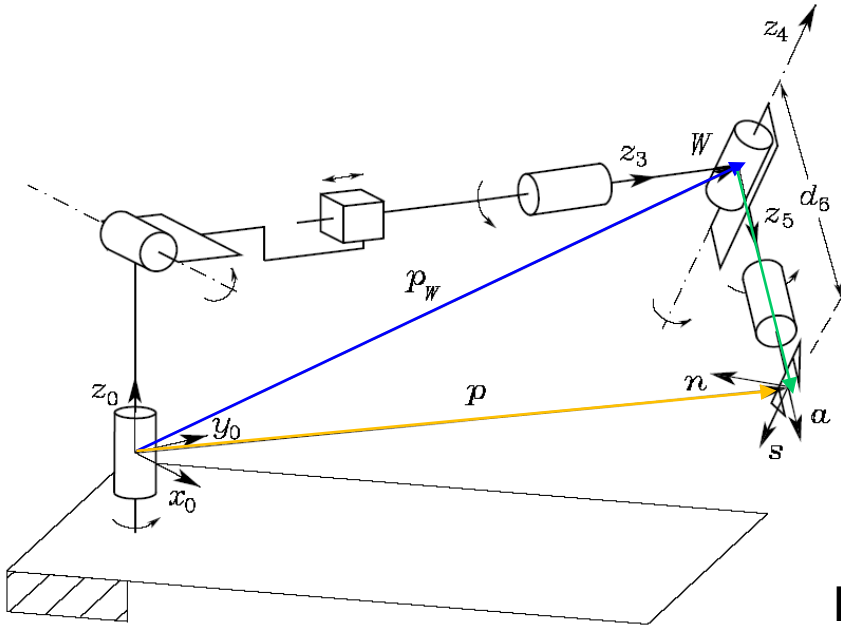
$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2)p_x + a_2 s_2 p_y}{p_x^2 + p_y^2}$$

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2)p_y - a_2 s_2 p_x}{p_x^2 + p_y^2}$$

$$\Rightarrow \vartheta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1)$$

COMPLICATO!

# Manipolatore con polso sferico



Se il manipolatore ha polso sferico, si può disaccoppiare la soluzione del problema cinematico inverso per la posizione da quella per l'orientamento

Posizione del centro polso:

$$\mathbf{p}_W = \mathbf{p} - d_6 \mathbf{a}$$

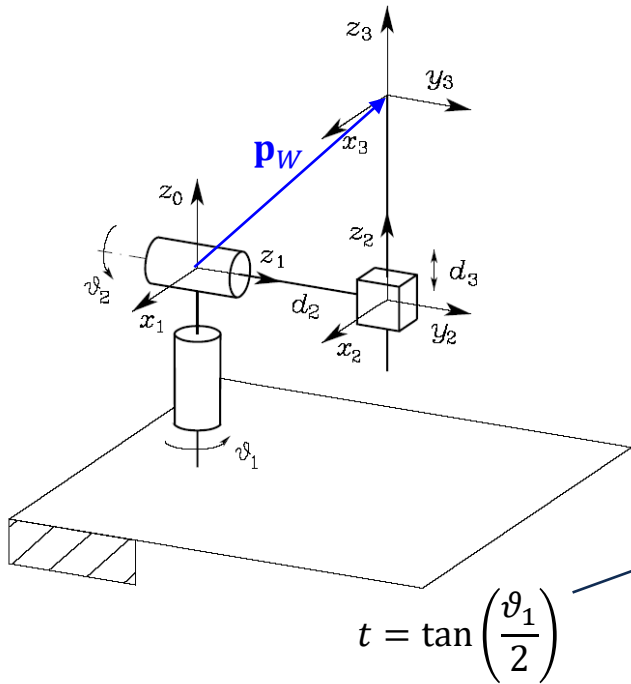
## Procedura operativa

- si calcola la posizione del centro polso  $\mathbf{p}_W$
- si risolve la cinematica inversa per  $(q_1, q_2, q_3)$
- si calcola la matrice  $\mathbf{R}_3^0(q_1, q_2, q_3)$
- si calcola  $\mathbf{R}_6^3(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) = \mathbf{R}_3^0{}^T \mathbf{R}$
- si risolve la cinematica inversa per l'orientamento, ricavando  $(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)$

*difficile ma di solito fattibile  
(vedere prossime slide)*

*vedere la slide dedicata*

# Cinematica inversa del manipolatore sferico



$$\mathbf{p}_W \rightarrow \vartheta_1, \vartheta_2, d_3$$

Si esprime  $\mathbf{p}_W$  rispetto alla terna 1:

Dalla terza equazione:

$$c_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow s_1 = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\vartheta_1 = 2 \operatorname{Atan2} \left( -p_{Wx} \pm \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - d_2^2}, d_2 + p_{Wy} \right)$$

Dalle prime due equazioni:

$$\frac{p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1}{-p_{Wz}} = \frac{d_3s_2}{-d_3c_2} \Rightarrow \vartheta_2 = \operatorname{Atan2}(p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1, p_{Wz})$$

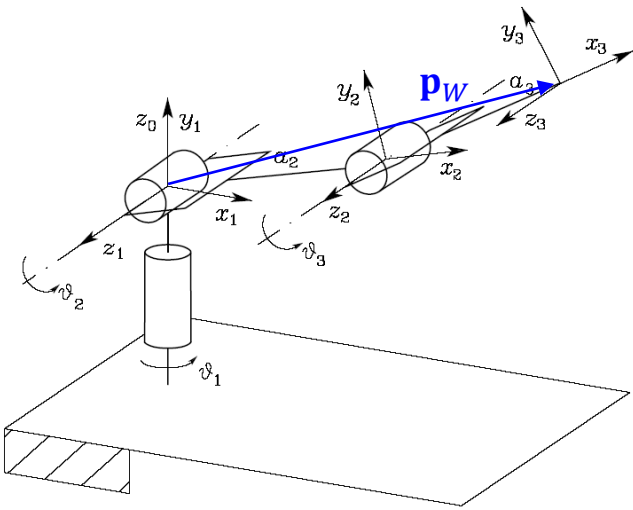
Quadrando e sommando le prime due:

$$d_3 = \sqrt{(p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1)^2 + p_{Wz}^2}$$

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2$$

$$\mathbf{p}_W^1 = \begin{bmatrix} p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1 \\ -p_{Wz} \\ -p_{Wx}s_1 + p_{Wy}c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3s_2 \\ -d_3c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

# Cinematica inversa del manipolatore antropomorfo



$$\mathbf{p}_W \rightarrow \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$$

$$\vartheta_1 = \text{Atan2}(p_{Wy}, p_{Wx})$$

$$\vartheta_1 = \pi + \text{Atan2}(p_{Wy}, p_{Wx})$$

Determinato  $\vartheta_1$  la struttura è planare, per cui:

$$c_3 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \rightarrow \vartheta_3 = \text{Atan2}(s_3, c_3)$$

$$s_3 = \pm \sqrt{1 - c_3^2}$$

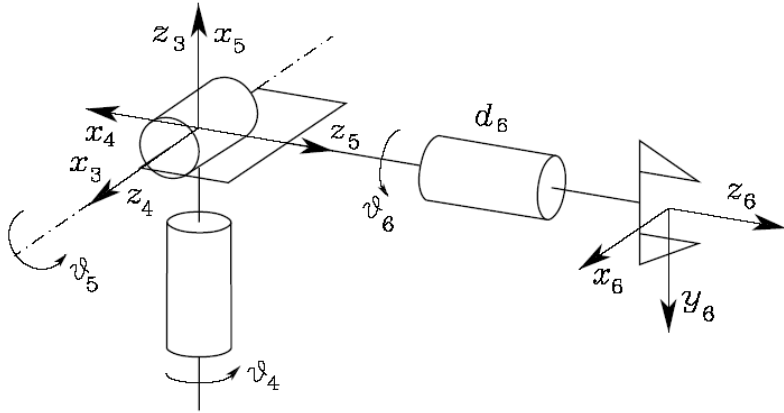
altre 2 soluzioni

$$c_2 = \frac{(a_2 + a_3c_3) \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3s_3p_{Wz}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2}$$

$$s_2 = \frac{(a_2 + a_3c_3)p_{Wz} - a_3s_3 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2}$$

$$\rightarrow \vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

# Cinematica inversa del polso sferico



$$\mathbf{R}_6^3 = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix}$$



$$\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$$

Per la soluzione, si utilizzano le formule note per gli angoli di Eulero ZYZ:

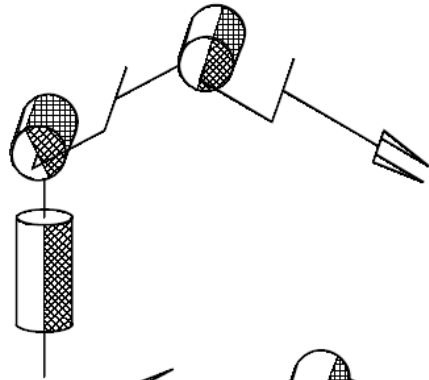
$$\begin{aligned} \vartheta_5 \in (0, \pi) \quad \vartheta_4 &= \text{Atan2}(a_y^3, a_x^3) \\ \vartheta_5 &= \text{Atan2}\left(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right) \\ \vartheta_6 &= \text{Atan2}(s_z^3, -n_z^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_5 \in (-\pi, 0) \quad \vartheta_4 &= \text{Atan2}(-a_y^3, -a_x^3) \\ \vartheta_5 &= \text{Atan2}\left(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right) \\ \vartheta_6 &= \text{Atan2}(-s_z^3, n_z^3) \end{aligned}$$

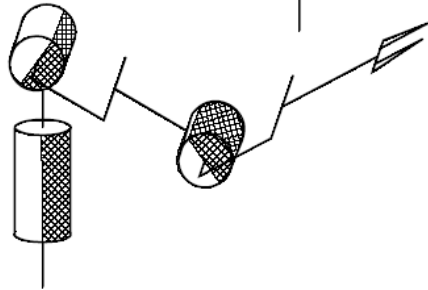
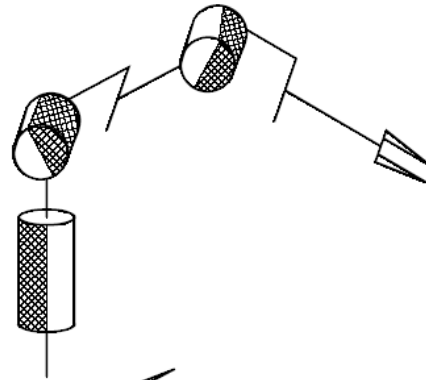
# Manipolatore antropomorfo

Per il manipolatore antropomorfo esistono quindi **quattro configurazioni ammissibili**:

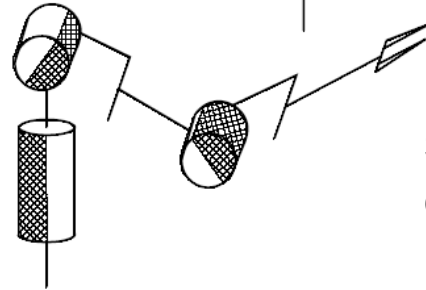
spalla destra,  
gomito alto



spalla sinistra,  
gomito alto



spalla destra,  
gomito basso

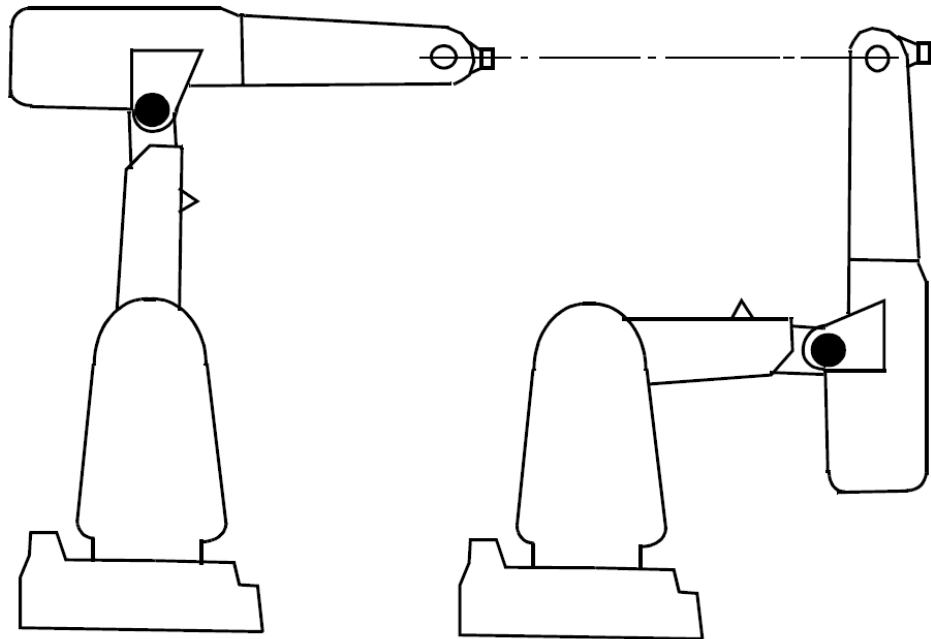


spalla sinistra,  
gomito basso

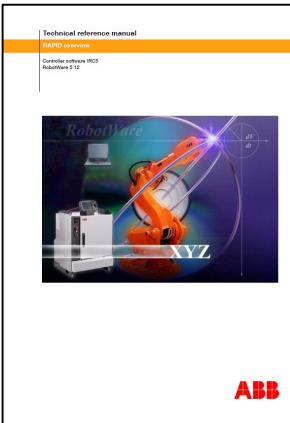
Se è montato un polso sferico, **esistono otto soluzioni della cinematica inversa**, che possono essere espresse in forma chiusa

## Dal manuale ABB: differenti configurazioni del robot

Queste due configurazioni possono essere ottenute ruotando il braccio all'indietro e quindi ruotando l'asse 1 di 180 gradi:



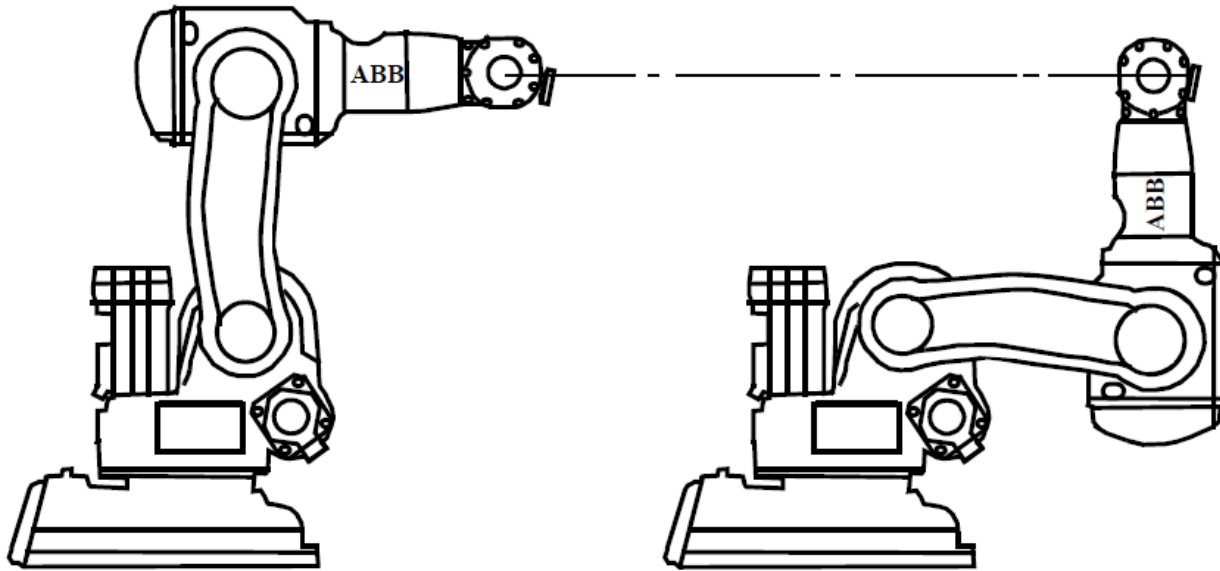
La posizione e l'orientamento dell'organo finale sono esattamente gli stessi per le due configurazioni.



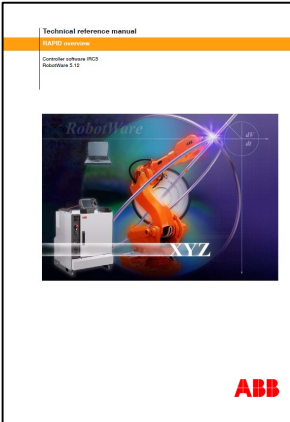
Fonte: ABB

## Dal manuale ABB: differenti configurazioni del robot

Queste due configurazioni corrispondono alle situazioni «gomito verso l'alto» e «gomito verso il basso»:

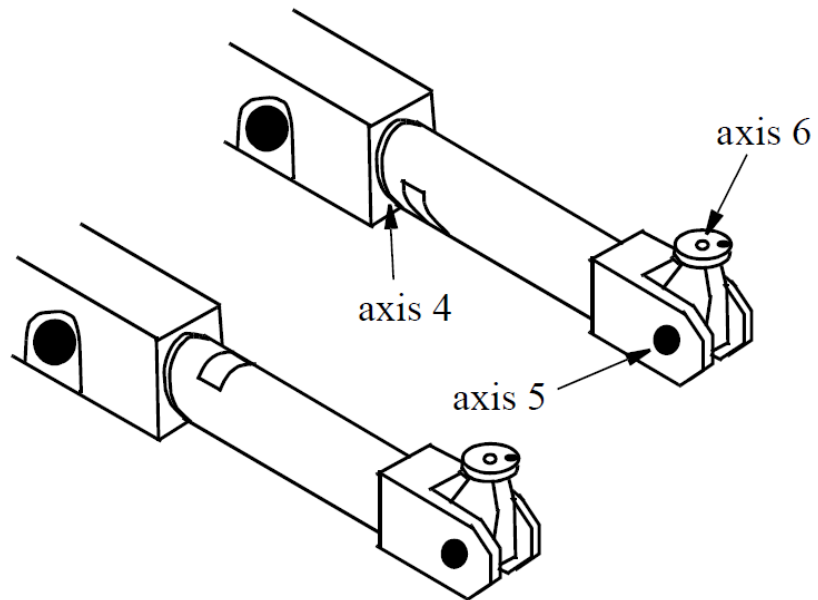


Fonte: ABB

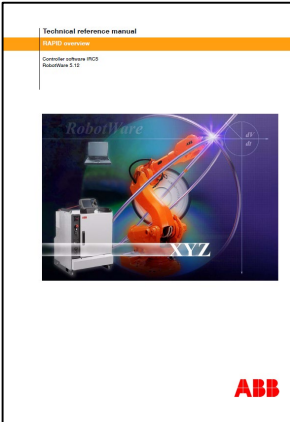


## Dal manuale ABB: differenti configurazioni del robot

Queste due configurazioni sono ottenute con diverse combinazioni delle variabili di giunto del polso:

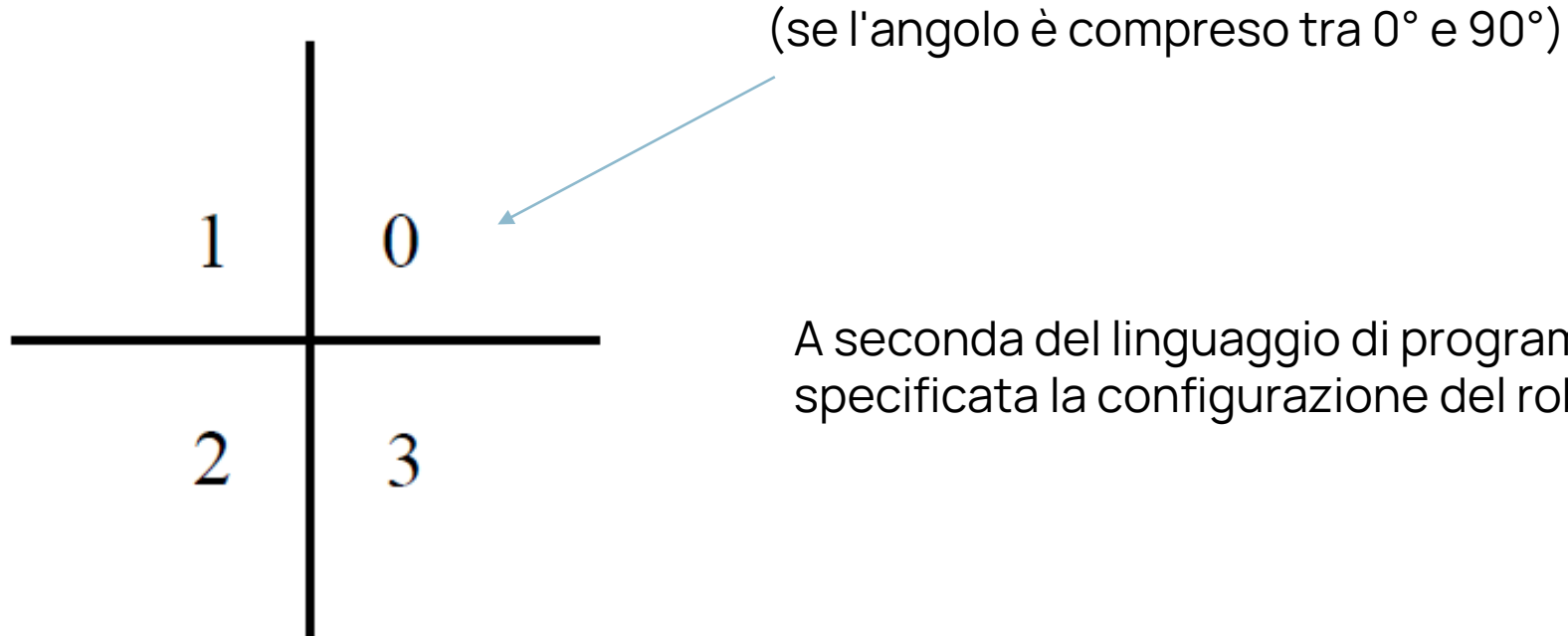


Fonte: ABB

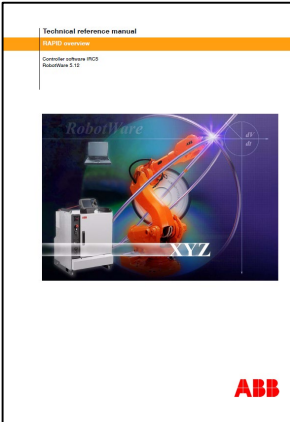


## Dal manuale ABB: specifica della configurazione del robot

Quando una posa del robot (in termini di posizione e orientamento del sistema di coordinate dell'utensile) è programmata, è necessario specificare una configurazione del robot. Questo di solito viene fatto definendo il quadrante appropriato per gli assi 1, 4 e 6:



Fonte: ABB



A seconda del linguaggio di programmazione, il modo in cui viene specificata la configurazione del robot potrebbe cambiare.

# Dal manuale FANUC: specifica della configurazione del robot

Quando una posa del robot (in termini di posizione e orientamento del sistema di coordinate dell'utensile) è programmata, è necessario specificare una configurazione del robot.

## 8.2 POSITIONAL DATA

The KAREL language uses the POSITION, XYZWPR, XYZWPREXT, JOINTPOS, and PATH data types to represent positional data. The POSITION data type is composed of the following:

- Three REAL values representing an x, y, z location expressed in millimeters
- Three REAL values representing a w, p, r orientation expressed in degrees
- One CONFIG Data Type, consisting of 4 booleans and 3 integers, which represent the configuration in terms of joint placement and turn number. Before you specify the config data type, make sure it is valid for the robot being used. Valid joint placement values include:
  - 'R' or 'L' (shoulder right or left)
  - 'U' or 'D' (elbow up or down)
  - 'N' or 'F' (wrist no-flip or flip)
  - 'T' or 'B' (config front or back)

A turn number is the number of complete turns a multiple turn joint makes beyond the required rotation to reach a position.

**FANUC America Corporation  
SYSTEM R-30iA and R-30iB  
Controller KAREL Reference  
Manual**

MARRC75KR07091E Rev H  
Applies to Version 7.50 and higher  
© 2014 FANUC America Corporation  
All Rights Reserved.

This publication contains proprietary information of FANUC America Corporation furnished for customer use only. No other uses are authorized without the express written permission of FANUC America Corporation.  
FANUC America Corporation  
3000 W. Hamlin Road  
Rochester Hills, Michigan 48309-3253



**POLITECNICO**  
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA  
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

## Contatti

Paolo Rocco  
[paolo.rocco@polimi.it](mailto:paolo.rocco@polimi.it)