POLITECNICO
MILANO 1863

Fondamenti di Automatica

a.a. 2023-2024

Prof. Paolo Rocco

31 gennaio 2025 - Appello

COGNOME E NOME: _____

MATRICOLA: _____

FIRMA: _____

Avvertenze:

- Il presente fascicolo si compone di **10** pagine (compresa la copertina). Firmare il frontespizio.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula per nessun motivo se non consegnando il compito o ritirandosi.
- Nei primi 30 minuti della prova non è consentito ritirarsi.
- Durante la prova non è consentito consultare libri o appunti di alcun genere.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici con display grafico.
- Le risposte vanno fornite **esclusivamente negli spazi** predisposti. Solo in caso di correzioni o se lo spazio non è risultato sufficiente, utilizzare la controcopertina del fascicolo.
- La chiarezza e l'**ordine** delle risposte costituiranno elemento di giudizio.
- Al termine della prova va consegnato **solo il presente fascicolo**. Ogni altro foglio eventualmente consegnato non sarà preso in considerazione.

Esercizio 1

Si consideri il sistema con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 3x_2(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= 2u(t)\\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t)\end{aligned}$$

Domanda 1.1 Si classifichi il sistema (lineare o no, tempo invariante o no, ecc.) e se ne studi la stabilità.

Domanda 1.2 Sapendo che la matrice esponenziale associata al sistema è

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 3 - 3e^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si calcoli il movimento libero dell'uscita del sistema con stato iniziale generico $x(0) = [x_{1_0} \;\; x_{2_0}]^\top$.

$y_l(t) =$

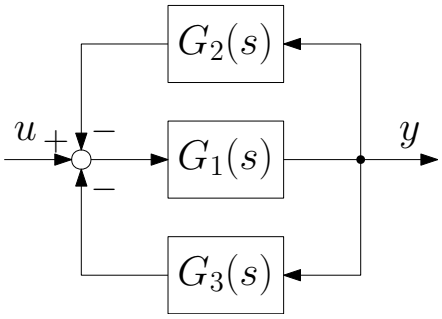
Domanda 1.3 Si indichi la condizione sullo stato iniziale $x(0)$ per cui il movimento libero dell'uscita si annulli asintoticamente.

$x(0) =$

Domanda 1.4 Si studino le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema.

Esercizio 2

Si consideri lo schema a blocchi rappresentato nella seguente figura, dove $G_1(s), G_2(s)$ e $G_3(s)$ sono le funzioni di trasferimento di tre sistemi LTI.



Domanda 2.1 Calcolare l'espressione $G(s)$ della funzione di trasferimento tra u e y, in funzione di $G_1(s), G_2(s)$ e $G_3(s)$.

$G(s) =$

Domanda 2.2 Si discuta la stabilità dello schema a blocchi complessivo, in funzione delle proprietà di stabilità delle funzioni di trasferimento $G_1(s), G_2(s)$ e $G_3(s)$.

Domanda 2.3 Sapendo che quando $G_1(s) = \frac{1}{s+\alpha}$ e $G_2(s) = G_3(s) = \frac{1}{s-2}$, con α parametro reale, la funzione di trasferimento $G(s)$ vale

$$G(s) = \frac{s-2}{s^2 + (\alpha - 2)s + 2 - 2\alpha}$$

si discuta la stabilità di $G(s)$ al variare di α.

Domanda 2.4 Considerando $\alpha = 0$ si calcolino, se possibile, i valori iniziali $y(0)$ e finali $y(\infty)$ dell'uscita del sistema, a fronte di uno scalino della variabile di ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$.

Esercizio 3

Si consideri un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{z+1}{(z+0.5)\,(z-2)}$$

Domanda 3.1 Si determinino tipo e guadagno di $G(z)$.

$g =$
$\mu =$

Domanda 3.2 Si discuta la stabilità del sistema.

Domanda 3.3 Si determini l'equazione alle differenze nel dominio del tempo che lega un generico ingresso $u(k)$ di $G(z)$ all'uscita $y(k)$.

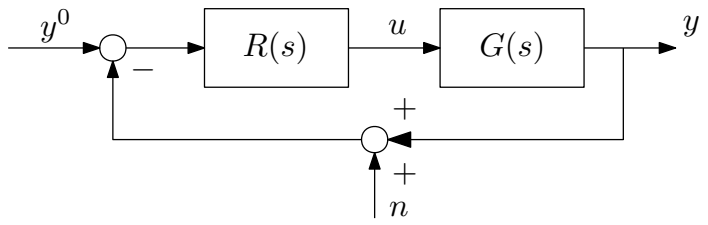
$y(k) =$

Domanda 3.4 Si calcoli l'espressione analitica della risposta di $G(z)$ all'impulso unitario.

$y(k) =$

Esercizio 4

Si consideri il sistema di controllo schematizzato nella seguente figura



$$G(s) = \frac{0.3}{(10s+1)(0.01s+1)}$$

Domanda 4.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ di un regolatore di tipo PI in modo tale che:

1. con riferimento $y^\circ(t) = 10\,\mathrm{sca}(t)$ e in assenza del disturbo n, l'errore $e(t) = y^\circ(t) - y(t)$ sia nullo a transitorio esaurito;
2. Il disturbo $n(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, con $\bar{\omega} \geq 30$ rad/s, sia attenuato sull'uscita y di un fattore almeno pari a 10;
3. Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale di 80°;
4. La pulsazione critica ω_c sia la massima possibile.

A conclusione del progetto, si riporti l'espressione del regolatore:

$R(s) =$

Domanda 4.2 Considerando l'implementazione del controllore in uno schema di controllo digitale con tempo di campionamento T:

- utilizzando uno dei metodi noti, si ricavi l'espressione della funzione di trasferimento del regolatore a tempo discreto $R^*(z)$;
- si indichi un opportuno valore di tempo di campionamento T.