



POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

A.A. 2023-2024

PROF. PAOLO ROCCO

25 GIUGNO 2024 - SECONDO APPELLO

COGNOME E NOME: _____

MATRICOLA: _____

FIRMA: _____

Avvertenze:

- Il presente fascicolo si compone di **10** pagine (compresa la copertina). Firmare il frontespizio.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula per nessun motivo se non consegnando il compito o ritirandosi.
- Nei primi 30 minuti della prova non è consentito ritirarsi.
- Durante la prova non è consentito consultare libri o appunti di alcun genere.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici con display grafico.
- Le risposte vanno fornite **esclusivamente negli spazi** predisposti. Solo in caso di correzioni o se lo spazio non è risultato sufficiente, utilizzare la controcopertina del fascicolo.
- La chiarezza e l'**ordine** delle risposte costituiranno elemento di giudizio.
- Al termine della prova va consegnato **solo il presente fascicolo**. Ogni altro foglio eventualmente consegnato non sarà preso in considerazione.

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico lineare invariante e a tempo continuo in forma di stato:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u\end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 10 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{D} = 0$$

Domanda 1.1 Si valuti per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è asintoticamente stabile.

Domanda 1.2 Si valuti per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è completamente raggiungibile.

Domanda 1.3 Si valuti per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è completamente osservabile.

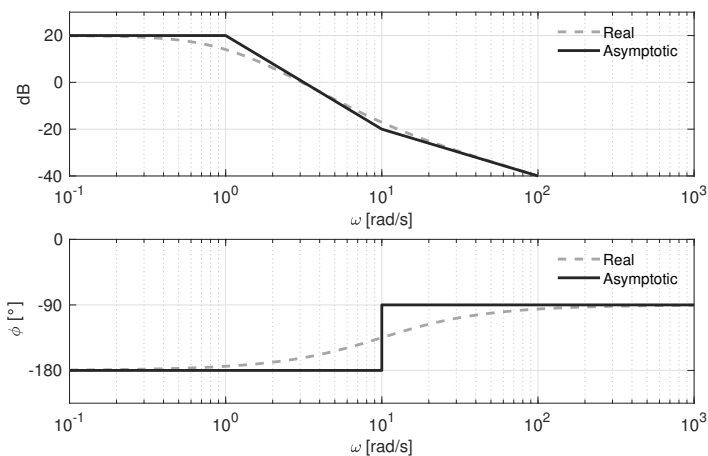
Domanda 1.4 Ponendo $\alpha = -1$ e sapendo che la corrispondente funzione di trasferimento del sistema è

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 101}$$

si commentino i risultati di raggiungibilità e osservabilità trovati nei punti precedenti e si indichino il valore dell'uscita a transitorio esaurito e il tempo di assestamento quando l'ingresso è uno scalino unitario.

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico lineare tempo invariante descritto dalla funzione di trasferimento $L(s)$, i cui diagrammi di Bode sono riportati nella seguente figura.



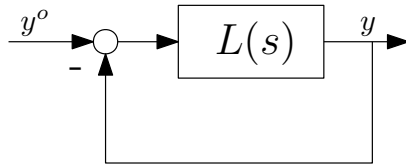
$$L(s) = \mu \frac{(1 + \tau s)^m}{(1 + s)(1 + Ts)}$$

Domanda 2.1 Si indichino, commentandoli opportunamente, i valori dei parametri μ , m , τ , T relativi a $L(s)$.

$\mu =$	$m =$	$\tau =$	$T =$
---------	-------	----------	-------

Domanda 2.2 Tracciare il diagramma polare di $L(s)$.

Domanda 2.3 Considerando lo schema a blocchi riportato nella seguente figura, si studi la stabilità del sistema in anello chiuso usando il criterio di Nyquist.



Domanda 2.4 Sapendo che il polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso è

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + s + 9$$

si verifichi il risultato di stabilità trovato al punto precedente, motivando la risposta.

Esercizio 3

Domanda 3.1 Si consideri un generico sistema dinamico lineare tempo invariante a tempo discreto descritto dall'equazione di stato:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k)$$

Si spieghi che cosa si intende per movimento libero e per movimento forzato dello stato e si scriva l'espressione del movimento libero a partire da un generico stato iniziale \mathbf{x}_0 .

Domanda 3.2 Con riferimento al sistema:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_2(k) \\x_2(k+1) &= x_3(k) \\x_3(k+1) &= u(k)\end{aligned}$$

si mostri che il moto libero diventa nullo dopo 3 passi, qualunque sia lo stato iniziale.

Domanda 3.3 Aggiunta alle equazioni del sistema la seguente trasformazione di uscita:

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k)$$

si determini la funzione di trasferimento del sistema e se ne discuta la stabilità.

Domanda 3.4 Si scriva l'equazione alle differenze nel dominio del tempo imposta tra l'ingresso u e l'uscita y dalla funzione di trasferimento del punto precedente.

Esercizio 4

Si consideri il sistema di controllo schematizzato nella Figura 1

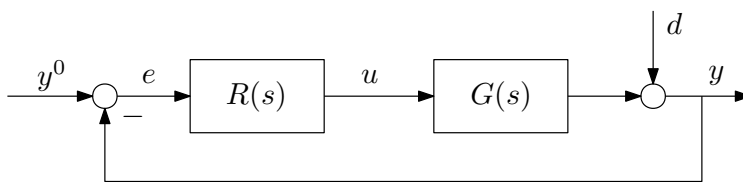


Figura 1: Sistema di controllo.

dove

$$G(s) = \frac{1 - 0.2s}{s(1 + 0.01s)}$$

Domanda 4.1 Si progetti un regolatore del minimo ordine possibile in modo da soddisfare i seguenti requisiti:

1. l'errore a transitorio esaurito sia $|e_\infty| \leq 0.15$ quando $y^\circ = \text{ram}(t)$;
2. il margine di fase sia $\varphi_m \geq 70^\circ$;
3. il disturbo $d = \sin(\omega t)$, $\omega \leq 0.03$ rad/s sia attenuato in ampiezza sull'uscita di un fattore almeno 100;
4. la pulsazione critica $\omega_c \geq 1$ rad/s.

A conclusione del progetto, si riporti l'espressione del regolatore:

$R(s) =$

Domanda 4.2 Sulla base del progetto del regolatore al punto precedente si scriva un'adeguata approssimazione della funzione di trasferimento in anello chiuso $F(s)$.

$$F(s) \approx$$

Domanda 4.3 Si calcoli l'errore a transitorio esaurito quando il segnale di riferimento è $Y^0(s) = \frac{A}{s^3}$.

$$e_\infty =$$