

POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

A.A. 2022-2023

PROF. ROCCO

13 GIUGNO 2023 - SECONDA PROVA IN ITINERE

SOLUZIONI

Esercizio 1

Si consideri un sistema dinamico retroazionato negativamente, con funzione d'anello:

$$L(s) = \rho \frac{s - 2}{s(s + 3)^2}$$

Domanda 1.1 Tracciare il luogo delle radici diretto.

La funzione di trasferimento può essere scritta nella forma:

$$L(s) = \rho \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

con $m = 1$, $n = 3$, $z_1 = -2$, $p_1 = 0$, $p_2 = p_3 = 3$. Sia il luogo diretto sia il luogo inverso presentano $n - m = 2$ asintoti. Come è noto, tali asintoti formano angoli di 90° e 270° con l'asse reale nel luogo diretto e coincidono con il semiasse reale positivo e negativo nel luogo inverso. Il punto di incontro degli asintoti sull'asse reale è individuato dall'ascissa:

$$x_a = \frac{\sum z_i - \sum p_i}{n - m} = -4$$

Con queste informazioni e ricordando la regola di appartenenza dei punti dell'asse reale al luogo si può tracciare il luogo delle radici diretto come in Figura 1.

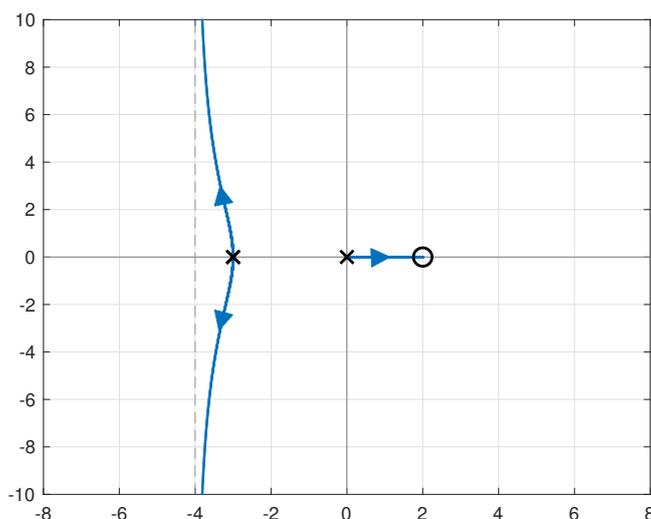


Figura 1: Luogo delle radici diretto.

Domanda 1.2 Tracciare il luogo delle radici inverso.

Il luogo delle radici inverso è rappresentato in Figura 2.

Domanda 1.3 Indicare per quali valori del parametro ρ il sistema in anello chiuso risulta asintoticamente stabile.

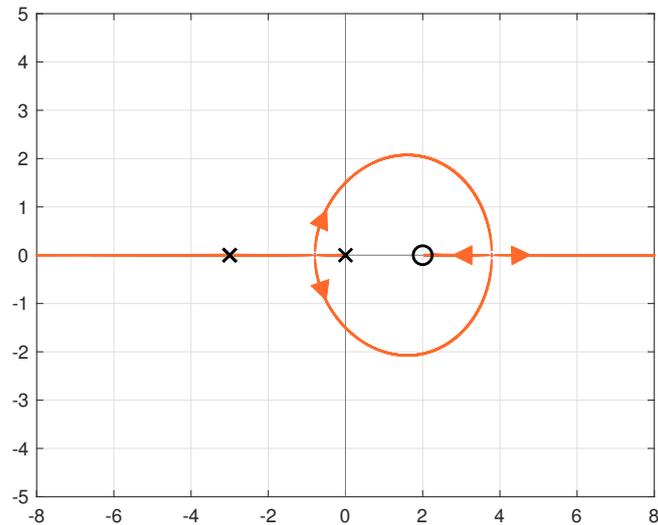


Figura 2: Luogo delle radici diretto.

$\rho :$

Dall'analisi dei luoghi delle radici risulta che:

- il sistema in anello chiuso non è mai asintoticamente stabile quando $\rho > 0$, avendo sempre almeno un polo nel semipiano destro.
- il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per $\bar{\rho} \leq \rho \leq 0$, dove $\bar{\rho}$ è il valore della costante di trasferimento per cui i poli del luogo inverso giacciono sull'asse immaginario. Per ricavare tale valore, non è possibile applicare direttamente la regola della punteggiatura, in quanto non è nota la parte immaginaria dei poli, e dunque la loro esatta posizione. Applicando la regola del baricentro, che si applica in quanto $n - m \geq 2$, è possibile trovare la posizione del rimanente polo del sistema. Infatti la somma delle parti reali dei poli si conserva e vale -6 per cui per il valore $\bar{\rho}$ per cui due poli hanno parte reale nulla, il terzo avrà parte reale -6 , ossia si troverà nel punto dell'asse reale $\bar{s} = -6$. Applicando ora la regola della punteggiatura in \bar{s} e ricordando che stiamo considerando il luogo inverso, si ottiene:

$$\bar{\rho} = -\frac{3 \cdot 3 \cdot 6}{8} = -\frac{27}{4}.$$

In conclusione, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile quando:

$$-\frac{27}{4} < \rho < 0$$

Domanda 1.4 È possibile trovare un valore di ρ per cui il sistema abbia almeno un polo in anello chiuso con parte reale -3.5 e sia asintoticamente stabile?

Sì. Sicuramente questo non può accadere quando $\rho > 0$: in questa situazione, rappresentata dal luogo diretto, è possibile che i due poli complessi coniugati abbiano parte reale pari a -3.5 , ma il sistema retroazionato non risulta asintoticamente stabile. Considerando il luogo inverso, invece, quando il sistema in anello chiuso è nella condizione limite di stabilità, il polo reale si trova in $\bar{s} = -6$. Dunque, esiste sicuramente un valore di $\rho < 0$ per cui il polo reale sarà in $s = -3.5$ e gli altri due poli avranno comunque parte reale negativa.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema di controllo digitale

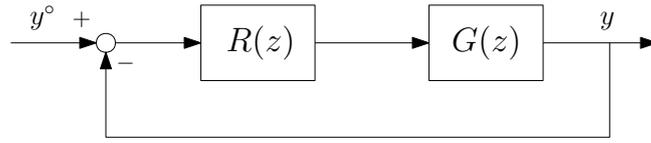


Figura 3: Schema di controllo digitale.

dove $R(z) = \frac{z+0.5}{z-1}$ è la funzione di trasferimento a tempo discreto che implementa il regolatore, mentre $G(z) = \frac{0.5}{z^2+0.5z}$ è il sistema dinamico a tempo discreto da controllare.

Domanda 2.1 Si discuta la stabilità del sistema da controllare $G(z)$.

I poli del sistema $G(z)$ si trovano in $z_1 = 0$ e $z_2 = -0.5$. Avendo entrambi modulo inferiore a 1, è possibile affermare che il sistema $G(z)$ è asintoticamente stabile.

Domanda 2.2 Calcolare i primi 6 campioni della risposta all'impulso di $G(z)$, verificandone l'andamento oscillante attorno al valore 0. A quale caratteristica del sistema $G(z)$ è imputabile tale comportamento?

$y(0) =$	$y(1) =$	$y(2) =$	$y(3) =$	$y(4) =$	$y(5) =$
----------	----------	----------	----------	----------	----------

Applicando il metodo della lunga divisione alla trasformata dell'uscita $Y(z) = G(z) \cdot 1$, si ottiene:

$$Y(z) = 0.5z^{-2} - 0.25z^{-3} + 0.125z^{-4} - 0.0625z^{-5}.$$

Quindi i primi 6 valori della risposta all'impulso sono:

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 0 \quad y(2) = 0.5 \quad y(3) = -0.25 \quad y(4) = 0.125 \quad y(5) = -0.0625.$$

Il comportamento oscillante della risposta è imputabile alla presenza del polo reale a parte reale negativa compreso tra -1 e 0 che, a nei sistemi a tempo discreto, è associato a modi oscillanti.

Domanda 2.3 Si scriva l'equazione alle differenze che implementa il regolatore $R(z)$, esplicitando il procedimento seguito per ottenerla.

$u(k) =$

$$R(z) = \frac{z+0.5}{z-1} = \frac{1+0.5z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)} \quad \rightarrow \quad U(z) = z^{-1}U(z) + E(z) + 0.5z^{-1}E(z)$$

Antitrasformando e ricordando il significato dell'operatore z^{-1} si ottiene l'equazione alle differenze:

$$u(k) = u(k-1) + e(k) + 0.5e(k-1)$$

Domanda 2.4 Si ricavi l'espressione della funzione di trasferimento in anello chiuso $H(z)$ tra il riferimento $y^\circ(k)$ e l'uscita $y(k)$, discutendone la stabilità e indicandone il valore del guadagno μ_H . Quale proprietà del regolatore $R(z)$ giustifica il valore di μ_H ottenuto?

$$H(z) = \text{-----} \quad \mu_H =$$

La funzione richiesta è la funzione di sensitività complementare:

$$F(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)} = \frac{R(z)G(z)}{1 + R(z)G(z)} = \frac{0.5}{z^2 - z + 0.5}$$

Si noti che, nel calcolo di $L(z)$, la cancellazione del polo non è da considerarsi critica, in quanto coinvolge un polo a parte reale negativa del sistema. La funzione presenta due poli in

$$z = 0.5 \pm j0.5$$

che, avendo modulo minore di 1, portano a concludere come il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.

Considerando che $F(z)$ non presenta singolarità in $z = 1$, il guadagno si può calcolare come:

$$\mu = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) = 1$$

Il valore ricavato è consistente con il fatto che il regolatore $R(z)$ presenta un'azione integrale (riconoscibile dal polo in $z = 1$) che, come ben noto, garantisce di ottenere errore a transitorio esaurito nullo a fronte di un ingresso a scalino, ossia guadagno della funzione di sensitività complementare unitario.

Esercizio 3

Si consideri il sistema di controllo schematizzato nella Figura 4

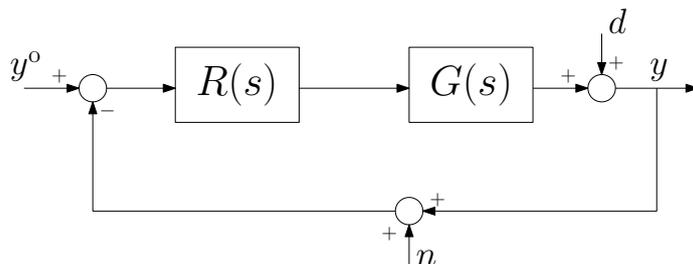


Figura 4: Sistema di controllo.

dove

$$G(s) = 10 \frac{1 - 0.1s}{1 + s}$$

Domanda 3.1 Si progetti un regolatore in modo da soddisfare i seguenti requisiti:

1. l'errore a transitorio esaurito sia $e_\infty = 0$ quando $y^o = \text{sca}(t)$
2. il disturbo $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, con $\bar{\omega} \leq 0.1 \text{ rad/s}$, sia attenuato a regime, sull'uscita y , di un fattore almeno pari a 10
3. il disturbo $n(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, con $\bar{\omega} \geq 30 \text{ rad/s}$, sia attenuato a regime, sull'uscita y , di un fattore almeno pari a 100
4. il margine di fase sia $\varphi_m \geq 70^\circ$
5. la pulsazione critica sia tale che $\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$

A conclusione del progetto, si riporti l'espressione del regolatore:

$R(s) =$

Progetto statico

La specifica sull'errore a transitorio esaurito richiede che il tipo della funzione d'anello sia $g_L = 1$. Essendo G di tipo 0, questo comporta che il regolatore deve essere di tipo $g_R = 1$, mentre non vi sono vincoli sul valore di guadagno μ_R . Possiamo porre convenzionalmente $\mu_R = 1$ e chiudere il progetto statico con la funzione di trasferimento:

$$R_1(s) = \frac{\mu_r}{s^{g_R}} = \frac{1}{s}$$

Attenuazione dei disturbi

La specifica sull'attenuazione del disturbo d comporta che:

$$\frac{1}{|L(j \cdot \bar{\omega})|} \leq 0.1 \quad \rightarrow \quad |L(j \cdot \bar{\omega})|_{db} \geq 20db \quad \text{per} \quad \bar{\omega} \leq 0.1 \text{ rad/s}$$

La specifica sull'attenuazione del disturbo n comporta invece che:

$$|L(j \cdot \bar{\omega})| \leq 0.01 \quad \rightarrow \quad |L(j \cdot \bar{\omega})|_{db} \leq -40db \quad \text{per} \quad \bar{\omega} \geq 30 \text{ rad/s}$$

Entrambe le specifiche si traducono quindi in zone proibite per l'andamento del diagramma di Bode del modulo di L .

Progetto dinamico

A valle del progetto statico, la funzione di trasferimento d'anello è:

$$L_1(s) = \frac{10}{s} \frac{1 - 0.1s}{1 + s}$$

Tracciandone il diagramma di Bode del modulo ci si rende subito conto che il margine di fase è del tutto insufficiente. Occorre quindi procedere al progetto dinamico.

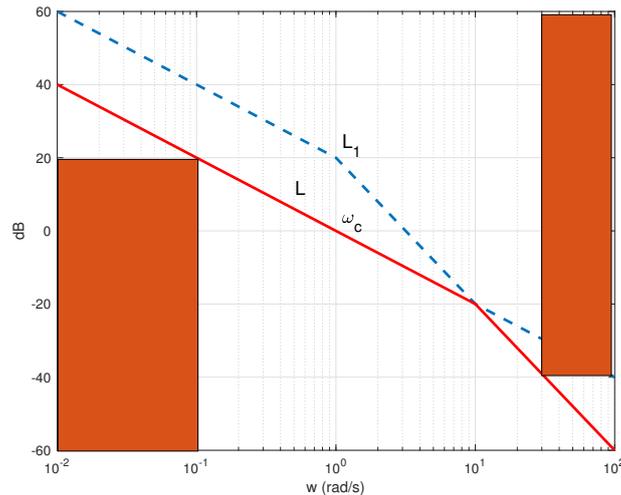
Prendiamo come pulsazione critica la minima consentita, $\omega_c = 1$ e tagliamo l'asse a 0 dB con un tratto di pendenza -1 . In bassa frequenza, non emergendo vincoli sul guadagno del regolatore dal progetto statico, si può far correre il diagramma di Bode del modulo di $|L|$ parallelo a quello di $|L_1|$, evitando così la prima zona proibita. Alla pulsazione 10 va mantenuto lo zero nel semipiano destro, tuttavia la pendenza del diagramma deve scendere a -2 per evitare la seconda zona proibita, risultato che si può ottenere aggiungendo due poli alla pulsazione 10.

La funzione d'anello candidata è quindi:

$$L(s) = \frac{1}{s} \frac{1 - 0.1s}{(1 + 0.1s)^2}$$

e il suo diagramma di Bode del modulo è tracciato in figura:

Si ottiene il margine di fase:



$$\phi_m = 180 - | -90 - \arctan(0.1) - 2 \arctan(0.1) | = 72.86^\circ$$

La funzione d'anello $L(s)$ rispetta tutte le specifiche di progetto.

Espressione del regolatore $R(s)$

Il regolatore ottenuto nel progetto dinamico ha funzione di trasferimento:

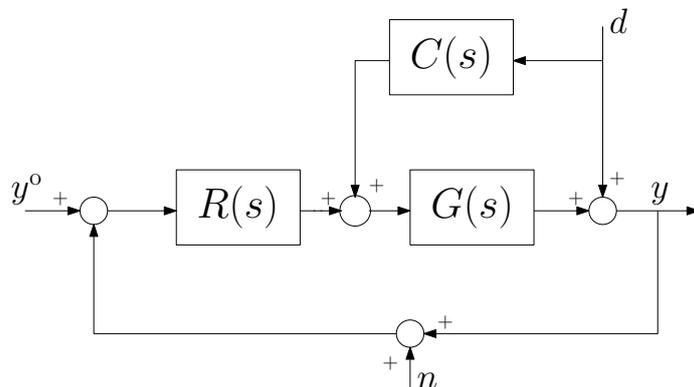
$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = 0.1 \cdot \frac{1 + s}{(1 + 0.1s)^2}$$

Nel suo complesso il regolatore ha quindi la seguente funzione di trasferimento:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{0.1}{s} \cdot \frac{1 + s}{(1 + 0.1s)^2}$$

Domanda 3.2 Si disegni lo schema a blocchi del sistema di controllo del presente esercizio comprensivo di un compensatore del disturbo d .

Lo schema a blocchi del sistema di controllo comprensivo di un compensatore del disturbo d è:



Domanda 3.3 Senza determinarne la funzione di trasferimento, si scriva la relazione che deve essere soddisfatta dalla risposta in frequenza del compensatore affinché l'effetto di un disturbo $d(t) = \sin(0.1t)$ sia annullato a transitorio esaurito sull'uscita y .

La relazione è la seguente:

$$C(0.1j)G(0.1j) + 1 = 0$$

Pertanto:

$$C(0.1j) = -\frac{1}{G(0.1j)} = -0.1 \cdot \frac{(1 + 0.1j)}{(1 - 0.01j)}$$