POLITECNICO
MILANO 1863

# Fondamenti di Automatica

a.a. 2023-2024

Prof. Rocco

15 Aprile 2024 - Prima prova in itinere

# SOLUZIONI

# Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema dinamico non lineare tempo invariante in forma di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_2 + u\\ \dot{x}_2 &= 1 + \alpha \sin(x_1) - x_3\\ \dot{x}_3 &= 1 + x_1 - x_3^2\\ y &= x_3\end{aligned}$$

**Domanda 1.1** Si determinino uno stato e un'uscita di equilibrio corrispondenti all'ingresso costante $u = \bar{u} = 0$.

*Gli eventuali stati di equilibrio si determinano risolvendo le equazioni:*

$$\begin{aligned}-2\bar{x}_2 + \bar{u} &= 0\\ 1 + \alpha \sin(\bar{x}_1) - \bar{x}_3 &= 0\\ 1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_3^2 &= 0\end{aligned}$$

*Posto $\bar{u} = 0$, una possibile soluzione, non unica, è evidentemente la seguente:*

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 0\\ \bar{x}_2 &= 0\\ \bar{x}_3 &= 1\end{aligned}$$

*L'uscita di equilibrio corrispondente è $\bar{y} = \bar{x}_3 = 1$.*

**Domanda 1.2** Si discuta, al variare di $\alpha$, la stabilità dello stato di equilibrio precedentemente determinato.

*Il sistema linearizzato assume la seguente espressione:*

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}_1 &= -2\delta x_2 + \delta u\\ \delta\dot{x}_2 &= \alpha \cos(\bar{x}_1)\,\delta x_1 - \delta x_3\\ \delta\dot{x}_3 &= \delta x_1 - 2\bar{x}_3\delta x_3\\ \delta y &= \delta x_3\end{aligned}$$

*Valutando le espressioni nello stato di equilibrio precedentemente determinato, si ottengono le matrici del sistema linearizzato:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0\\ \alpha & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*mentre $\mathbf{D} = 0$. Il polinomio caratteristico della matrice $A$ è il seguente:*

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & 2 & 0\\ -\alpha & s & 1\\ -1 & 0 & s+2 \end{vmatrix} = s^2(s+2) - 2(-\alpha(s+2) + 1) = s^3 + 2s^2 + 2\alpha s + 4\alpha - 2$$

*La tabella di Routh è la seguente:*

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2\alpha & 0 \\ 2 & 4\alpha - 2 & 0 \\ 1 & 0 & \\ 4\alpha - 2 & & \end{array}$$

*In base al criterio di Routh il sistema linearizzato è asintoticamente stabile se e solo se* $4\alpha - 2 > 0$, *ovvero* $\alpha > 0.5$. *Per questi valori di* $\alpha$ *lo stato di equilibrio del sistema non lineare di partenza è asintoticamente stabile.*

**Domanda 1.3** Posto $\alpha = 1$, si determini la funzione di trasferimento del sistema linearizzato trattato al punto precedente.

*La funzione di trasferimento è la seguente:*

$$G(s) = \mathbf{C}\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B} = \frac{s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 2}$$

**Domanda 1.4** Si determini il guadagno statico della funzione di trasferimento calcolata al punto precedente. A che valore tende la risposta di tale funzione di trasferimento a uno scalino di ampiezza 5?

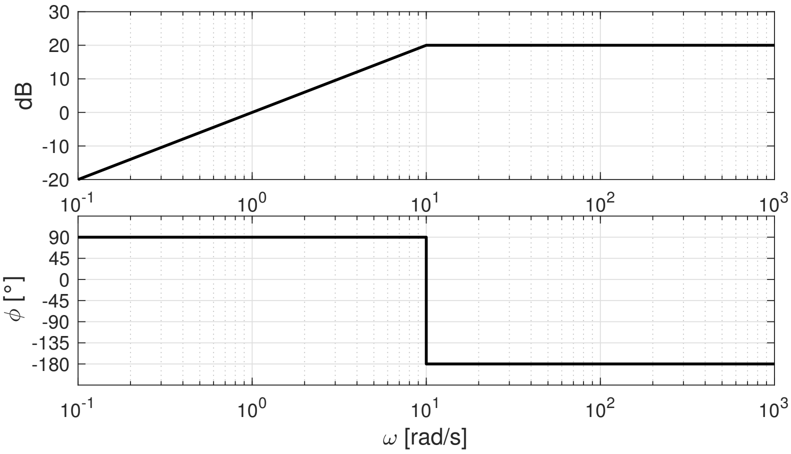
*La funzione di trasferimento ha tipo* $-1$, *il guadagno statico è il valore* $G(0) = 0$. *Poiché per* $\alpha = 1$ *il sistema è asintoticamente stabile, la risposta allo scalino converge e, per via del guadagno statico nullo, tende a 0.*

# Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico lineare tempo invariante con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\tau\, s + 1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 0.5\frac{s}{\omega_n} + 1},$$

i cui diagrammi di Bode asintotici sono rappresentati nella seguente figura.




**Domanda 2.1** Sfruttando i diagrammi di Bode di $G(s)$ si ricavino i valori dei parametri $\mu, \tau, g$ e $\omega_n$

*Dai diagrammi di Bode si possono ricavare le seguenti caratteristiche:*

- *La pendenza iniziale di* $20db/dec$ *indica un tipo* $g = -1$.
- *Il diagramma del modulo per* $\omega = 1$ *vale 1 (0 dB). Ne consegue che il valore assoluto del guadagno* $\mu$ *è pari a 1. Considerando che la fase iniziale del diagramma è pari a* $+90°$, *si deduce che il guadagno è positivo* $\rightarrow \mu = 1$.
- *In* $\omega = 10\, rad/s$ *sono presenti uno zero e due poli complessi coniugati, dunque* $|\tau| = 0.1$ *e* $\omega_n = 10$. *Considerando che i poli sono a parte reale negativa (lo smorzamento è positivo, pari a* $\xi = 0.25$*) e che la fase scende da* $+90°$ *a* $-180°$, *lo zero risulta essere a parte reale positiva* $\rightarrow \tau = -0.1$

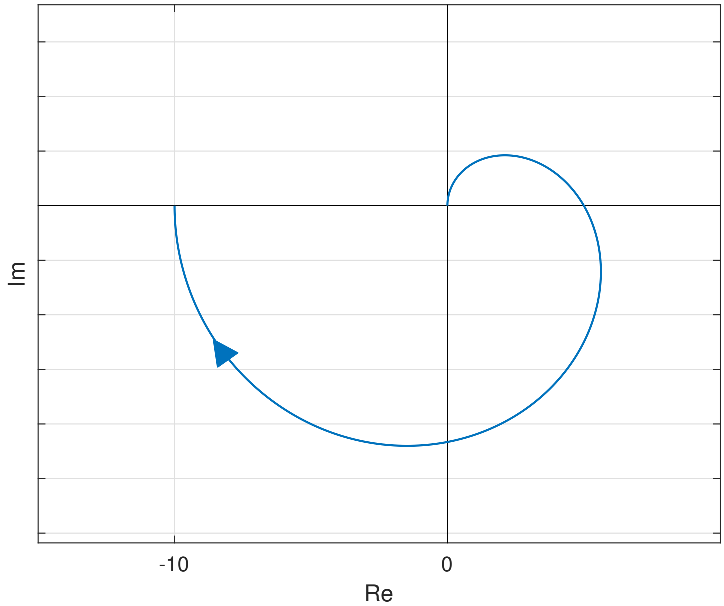
**Domanda 2.2** Si tracci il diagramma polare qualitativo di $G(s)$.

*Dai diagrammi di Bode si possono dedurre le seguenti informazioni qualitative:*

- *Il modulo parte da 0 per* $\omega \rightarrow 0$ *e cresce progressivamente con l'aumentare della pulsazione* $\omega$ *fino al valore asintotico di* $10$.
- *La fase parte da* $+90°$ *e decresce progressivamente con l'aumentare della pulsazione* $\omega$ *fino al valore asintotico di* $-180°$.

*Il diagramma polare qualitativo è dunque quello riportato nella seguente figura.*

**Domanda 2.3** Si calcolino, se possibile, il valore iniziale $y(0)$ e finale $y(t \rightarrow \infty)$ della risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{2t}$ usando i relativi teoremi.




*Il valore iniziale della risposta $y(t)$ si può ricavare applicando il teorema del valore iniziale:*

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot G(s) \cdot U(s) = \lim_{s\to\infty} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s-2} = \mu \cdot \omega_n^2 \cdot \tau = -10$$

*Non è possibile invece applicare il teorema del valore finale poichè $Y(s) = G(s)U(s)$ possiede un polo a parte reale positiva.*

**Domanda 2.4** Utilizzando il teorema della risposta in frequenza e l'espressione di $G(s)$ si calcoli, se possibile, l'ampiezza dell'uscita asintotica del sistema a fronte dell'ingresso $u(t) = \sin(10t)$. Si discuta per quale motivo tale ampiezza non corrisponde a quella ricavabile direttamente dai diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza sopra riportati.

*Visto che il sistema è asintoticamente stabile, il teorema della risposta in frequenza è applicabile. L'ampiezza $A$ dell'uscita, a fronte dell'ingresso $u(t) = \sin(10t)$ vale:*

$$A = |G(j\omega = 10)| \cdot 1 = |1| \frac{10|j+1|}{|1+0.5j-1|} = 20\sqrt{2}$$

*L'ampiezza ricavabile dal diagramma di Bode del modulo è invece di 20 dB, cioè è pari a 10.*
*Il motivo per cui i due valori differiscono è dovuto alla differenza tra diagrammi di Bode asintotici e reali. Infatti, essendo lo smorzamento dei poli complessi coniugati piccolo, il diagramma di Bode reale risulta essere molto diverso da quello asintotico, in corrispondenza della pulsazione dei poli $\omega = 10$, che coincide anche con quella della sinusoide in ingresso al sistema.*

# Esercizio 3

Si consideri lo schema a blocchi rappresentato in Figura 1.

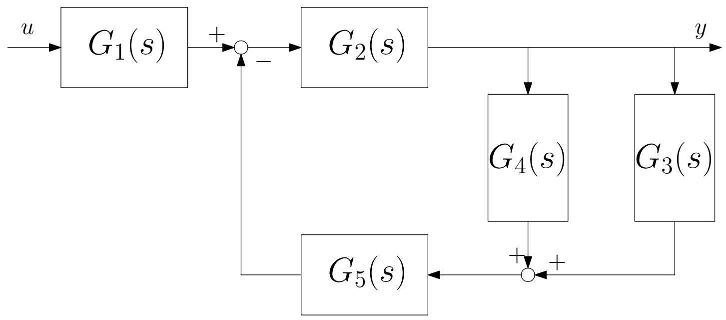



Figura 1: Schema a blocchi.

**Domanda 3.1** Si calcoli la funzione di trasferimento $G(s)$ tra le variabili d'ingresso $u$ e d'uscita $y$ dello schema.

$G(s) =$

*Lo schema a blocchi può essere interpretato riconoscendo un parallelo tra $G_3(s)$ e $G_4(s)$, poi in serie con $G_5(s)$. Definendo quindi $H(s) = (G_3(s)+G_4(s))G_5(s)$, $H(s)$ è in retroazione (negativa) con $G_2(s)$. La retroazione è infine in serie con $G_1(s)$. In conclusione, la funzione di trasferimento complessiva vale:*

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + (G_3(s) + G_4(s))G_5(s)G_2(s)} \tag{1}$$

**Domanda 3.2** Si spieghi se è necessario e/o sufficiente che una o più delle funzioni di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ e $G_5(s)$ sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema nel suo complesso.

*$G_1(s)$ è in serie alla retroazione, quindi è necessario che sia asintoticamente stabile perchè lo sia il sistema nel suo complesso. Nulla invece si può dire sulle altre funzioni di trasferimento, che si trovano coinvolte in un anello di retroazione.*

**Domanda 3.3** Assumendo che le funzioni di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ e $G_5(s)$ siano tutte del primo ordine e la funzione di trasferimento complessiva da $u$ a $y$ sia

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+5)}$$

si discuta, motivando la risposta, se il sistema è completamente osservabile e/o raggiungibile.

*Suppondendo di avere tutte le funzioni di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ e $G_5(s)$ del primo ordine, in assenza di cancellazioni, ci si aspetta che la funzione di trasferimento complessiva sia del quinto ordine. Poiché la funzione $G(s)$ è del secondo ordine, vuol dire che sono avvenute delle cancellazioni, cioè sono presenti delle dinamiche nascoste per cui il sistema non è completamente osservabile e/o raggiungibile.*

**Domanda 3.4** Considerando la funzione di trasferimento complessiva $G(s)$ del punto precedente, si calcoli la risposta analitica del sistema $y(t)$ a fronte dell'ingresso $u = 0.5\text{sca}(t)$.

$y(t) =$

*Avendo a disposizione l'espressione di $G(s)$ è possibile ricavare la trasformata di Laplace dell'uscita del sistema*

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{2}{(s+1)(s+5)} \cdot \frac{0.5}{s} = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

*Applicando lo sviluppo di Heaviside per il caso di poli reali distinti si ottiene:*

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)} = \frac{0.2}{s} - \frac{0.25}{s+1} + \frac{0.05}{s+5}$$

*Dunque, la risposta allo scalino è:*

$$y(t) = 0.2sca(t) - 0.25e^{-t} + 0.05e^{-5t}, \quad t \geq 0$$