POLITECNICO
MILANO 1863

Fondamenti di Automatica

a.a. 2023-2024

Prof. Paolo Rocco

11 giugno 2024 - Primo appello

SOLUZIONI

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico non lineare tempo invariante descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 u^2 + x_1(x_2 - 1) + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \sin(u) - \alpha x_2 + x_2 u \\ y &= \sin(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

dove α è un parametro reale non nullo.

Domanda 1.1 Fissato il valore dell'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$, si calcoli lo stato e l'uscita di equilibrio del sistema.

$\bar{x}_1 =$
$\bar{x}_2 =$
$\bar{y} =$

Ponendo a zero le derivate degli stati e l'ingresso pari a $u(t) = \bar{u} = 0$, si ottiene che

$$\begin{aligned}0 &= \bar{x}_1(\bar{x}_2 - 1) \\ 0 &= -\alpha\bar{x}_2 \\ \bar{y} &= \sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\end{aligned}$$

da cui $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$ e $\bar{y} = 0$.

Domanda 1.2 Si calcoli la matrice **A** del sistema linearizzato, verificandone la struttura diagonale, e la si utilizzi per discutere la stabilità del punto di equilibrio precedentemente individuato in funzione di α.

Per studiare la stabilità dello stato di equilibrio trovato, dopo aver linearizzato il sistema si ottiene che

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}_1 &= -\delta x_1 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= -\alpha\delta x_2 \\ \delta y &= \delta x_1 + \delta x_2\end{aligned}$$

La matrice della dinamica del sistema linearizzato è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

con autovalori in -1 e $-\alpha$, per cui lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile per $\alpha > 0$.

Domanda 1.3 Ponendo $\alpha = 1$, si calcoli la funzione di trasferimento del sistema linearizzato in corrispondenza dell'equilibrio trovato.

La funzione di trasferimento in corrispondenza dell'equilibrio trovato è

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Domanda 1.4 Considerando la funzione di trasferimento trovata al punto precedente, si ricavi il valore finale della risposta a uno scalino di ampiezza 30 e il tempo di assestamento.

$y_\infty =$
$t_a =$

Per il teorema del valore finale, la risposta allo scalino di ampiezza 30 converge al valore

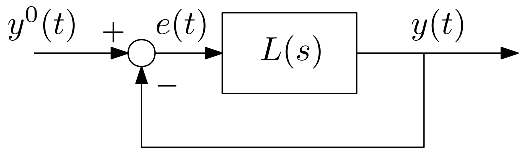
$$y_\infty = G(0) \cdot 30 = 30$$

mentre il tempo di assestamento è

$$t_a = 4.6 \cdot 1 = 4.6$$

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico mostrato nella seguente figura:



$$L(s) = \rho \, \frac{s}{(s+3)^3}$$

Domanda 2.1 Tracciare il luogo delle radici diretto.

La funzione di trasferimento può essere scritta nella forma:

$$L(s) = \rho \, \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

con $m = 1$, $n = 3$, $z_1 = 0$, $p_1 = p_2 = p_3 = -3$. Sia il luogo diretto sia il luogo inverso presentano $n - m = 2$ asintoti. Come è noto, tali asintoti formano angoli di $90°$ e $270°$ con l'asse reale nel luogo diretto e coincidono con il semiasse reale positivo e negativo nel luogo inverso. Il punto di incontro degli asintoti sull'asse reale è individuato dall'ascissa:

$$x_a = \frac{\sum z_i - \sum p_i}{n - m} = -4.5$$

Con queste informazioni e ricordando la regola di appartenenza dei punti dell'asse reale al luogo si può tracciare il luogo delle radici diretto come in Figura 1.

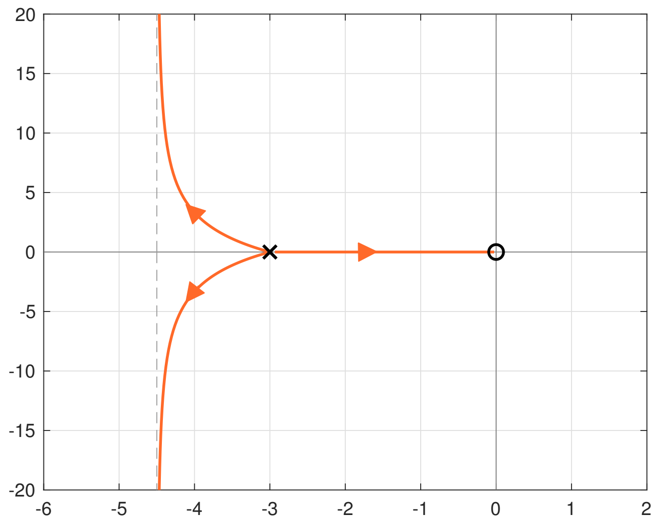


Figura 1: Luogo delle radici diretto.

Domanda 2.2 Tracciare il luogo delle radici inverso.

Il luogo delle radici inverso è rappresentato in Figura 2.

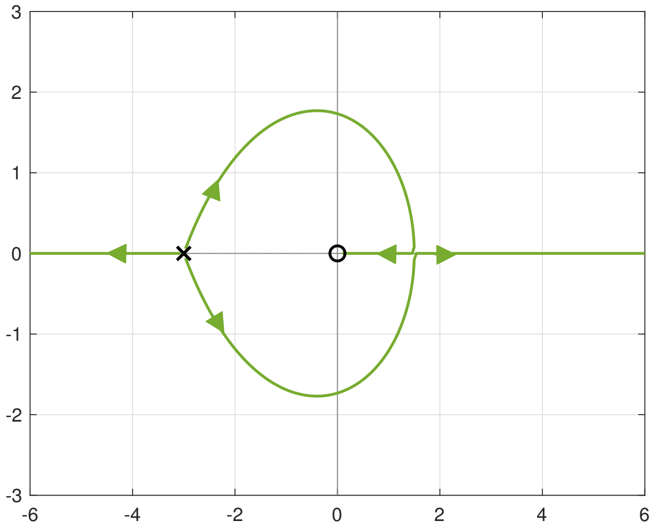


Figura 2: Luogo delle radici inverso.

Domanda 2.3 Indicare per quali valori del parametro ρ il sistema in anello chiuso risulta asintoticamente stabile.

ρ :

Dall'analisi dei luoghi delle radici risulta che:

- *il sistema in anello chiuso è sempre asintoticamente stabile quando* $\rho > 0$.
- *il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per* $\bar{\rho} < \rho < 0$, *dove* $\bar{\rho}$ *è il valore della costante di trasferimento per cui due poli del luogo inverso giacciono sull'asse immaginario. Per ricavare tale valore, non è possibile applicare direttamente la regola della punteggiatura, in quanto non è nota la parte immaginaria dei poli, e dunque la loro esatta posizione. Poiché* $n - m \geq 2$ *è possibile applicare la regola del baricentro, per cui la somma delle parti reali dei poli in anello chiuso si conserva e vale* -9. *Ne consegue che, per il valore di* ρ *cercato, due poli avranno parte reale nulla e il terzo si troverà nel punto* -9.
  Applicando ora la regola della punteggiatura in $\bar{s}$ *e ricordando che stiamo considerando il luogo inverso, si ottiene:*
  $$\bar{\rho} = -\frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{9} = -24.$$
  In conclusione, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile quando:
  $$\rho > -24$$

Domanda 2.4 Per i valori di ρ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, si valuti l'errore a transitorio esaurito (e_∞) a fronte di un riferimento a scalino $y^o(t) = A\,\mathrm{sca}(t)$. Quale proprietà di $L(s)$ giustifica il risultato ottenuto?

La funzione di sensitività (che lega il riferimento all'errore) vale:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{(s+3)^3}{(s+3)^3 + \rho s}$$

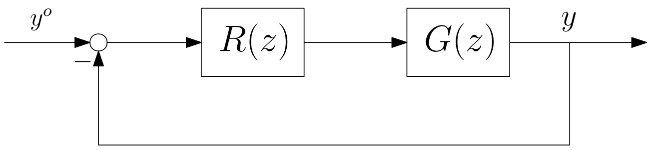
Applicando il teorema dal valore finale (nell'ipotesi che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile) si ottiene:

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot S(s) \cdot \frac{A}{s} = A \quad \forall \rho$$

Il risultato trovato è coerente con il fatto che la funzione d'anello $L(s)$ presenta uno zero nell'origine. Tale zero si ritrova, per costruzione, anche nella funzione di sensitività complementare $F(s)$. Questo implica che la risposta allo scalino del sistema retroazionato (quando asintoticamente stabile) converge sempre a zero, e dunque l'errore asintotico risulta sempre identicamente pari all'ampiezza dello scalino stesso A.

Esercizio 3

Si consideri il seguente schema di controllo digitale



dove α è un parametro reale, $R(z) = \dfrac{0.5\alpha z}{z - 0.1}$ è la funzione di trasferimento a tempo discreto che implementa il regolatore, mentre $G(z) = \dfrac{z - 0.1}{z^2 + 2z}$ è il sistema dinamico a tempo discreto da controllare.

Domanda 3.1 Si calcoli per quali valori di α il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

α:

La funzione d'anello del sistema retroazionato è pari a

$$L(z) = R(z)G(z) = \frac{0.5\alpha}{z + 2}$$

da cui è possibile scrivere il polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso, cioè

$$\chi(z) = z + 2 + 0.5\alpha$$

Ne consegue che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per

$$|z| = |-2 - 0.5\alpha| < 1$$

da cui si ricava $-6 < \alpha < -2$.

Domanda 3.2 Ponendo $\alpha = -5$, si calcolino i primi 4 campioni della risposta all'impulso del sistema in anello chiuso.

$y(0) =$	$y(1) =$	$y(2) =$	$y(3) =$

La funzione di trasferimento in anello chiuso è data da

$$F(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)} = \frac{\alpha}{2z + 4 + \alpha} = \frac{-5}{2z - 1}$$

Utilizzando il metodo della lunga divisione si ottiene

$$y(0) = 0, \quad y(1) = -2.5, \quad y(2) = -1.25, \quad y(3) = -0.625$$

Domanda 3.3 Sempre con $\alpha = -5$, si scriva l'equazione alle differenze che implementa il regolatore $R(z)$, esplicitando il procedimento per ottenerla.

$u(k)$:

$$R(z) = -\frac{2.5z}{z-0.1} = \frac{U(z)}{E(z)} \qquad \rightarrow \qquad U(z) = 0.1z^{-1}U(z) - 2.5E(z)$$

Antitrasformando e ricordando il significato dell'operatore z^{-1} si ottiene l'equazione alle differenze:

$$u(k) = 0.1u(k-1) - 2.5e(k)$$

Domanda 3.4 Sempre con $\alpha = -5$, si verifichi che il regolatore digitale $R(z)$ deriva dalla discretizzazione, adottando la trasformazione di Eulero implicito (all'indietro), dell'espressione del seguente regolatore analogico

$$R^o(s) = -\frac{2.5}{0.1s + 0.9}$$

e si determini anche il periodo di campionamento T compatibile con tale discretizzazione.

$T =$

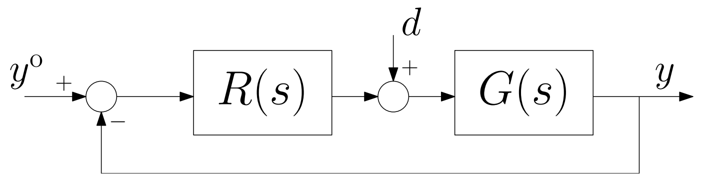
Utilizzando la trasformazione bilineare di Eulero implicito (all'indietro) per il regolatore $R^o(s)$ si ottiene che

$$R(z) = R^o\left(\frac{z-1}{Tz}\right) = -\frac{2.5Tz}{0.9Tz + 0.1z - 0.1}$$

Risulta quindi immediato verificare che per $T = 1$ il regolatore digitale è $R(z) = -\dfrac{2.5z}{z-0.1}$.

Esercizio 4

Si consideri il sistema di controllo schematizzato nella seguente figura.



$$G(s) = \frac{100}{s(0.1s+1)}$$

Domanda 4.1 Si progetti un regolatore in grado di soddisfare le seguenti specifiche di progetto:

1. errore a transitorio esaurito $e_\infty = 0$, quando $d(t) = \mathrm{sca}(t)$
2. pulsazione critica $\omega_c \geq 0.8$ rad/s
3. il margine di fase sia $\varphi_m \geq 65°$

A conclusione del progetto, si riporti l'espressione del regolatore:

$R(s) =$

Progetto statico
Il disturbo a scalino a monte di $G(s)$ equivale agli effetti statici a un disturbo a rampa in uscita. In base alle tabelle di precisione statica, per avere errore nullo a regime occorre una funzione di trasferimento d'anello di tipo 2 ($g_L = 2$). Allo stesso risultato si può arrivare con l'applicazione diretta del teorema del valore finale. Poiché la funzione di trasferimento del sistema sotto controllo ha tipo 1 ($g_G = 1$), occorrerà scegliere un regolatore di tipo 1 ($g_R = g_L - g_G = 1$) e di guadagno positivo arbitrario. Scegliendo $\mu_R = 1$ si conclude il progetto statico con la funzione di trasferimento:

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}} = \frac{1}{s}$$

Progetto dinamico
La funzione di trasferimento d'anello nota a seguito del progetto statico è la seguente:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{100}{s^2(0.1s+1)}$$

Tracciandone il diagramma di Bode del modulo, si verifica immediatamente che il margine di fase è negativo. Occorre quindi procedere al progetto di $L(s)$, sagomando opportunamente il diagramma di Bode del modulo. Si sceglie in particolare di tagliare l'asse a 0 dB con pendenza -1 alla pulsazione $\omega_c = 1$. In bassa frequenza occorre riportare la pendenza al valore -2, aggiungendo a questo scopo uno zero, per esempio alla pulsazione 0.1. In alta frequenza, occorre portare la pendenza finale al valore -3. Si può mantenere il polo alla pulsazione 10, aggiungendone un altro alla stessa pulsazione. I digrammi di Bode del modulo asintotici di L_1 e L sono tracciati in figura.
La fase critica associata a $L(s)$ vale:

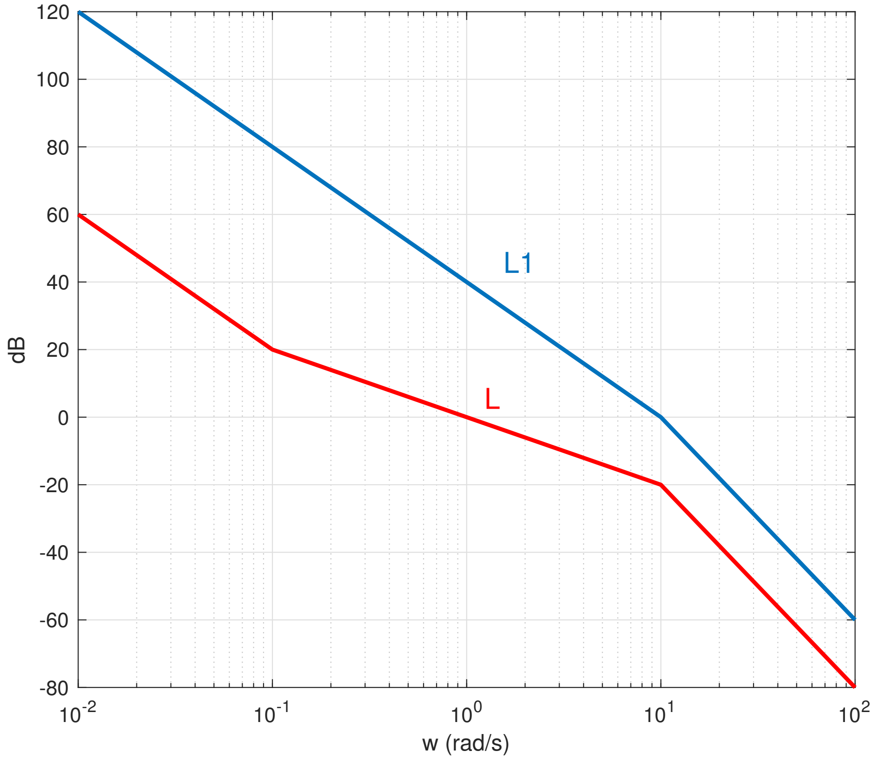
$$\varphi_c = -180 + \arctan(\frac{\omega_c}{0.1}) - 2\arctan(\frac{\omega_c}{10}) = -180 - \arctan(10) - 2\arctan(10) = -107.1°$$

da cui il margine di fase:

$$\varphi_m = 180 - |\varphi_c| = 72.9°$$

Tutte le specifiche sono quindi soddisfatte. L'espressione della funzione di trasferimento d'anello è:

$$L(s) = \frac{0.1}{s^2}\frac{(10s+1)}{(0.1s+1)^2}$$



dove il valore del guadagno si ottiene tenendo conto che il prolungamento del tratto iniziale del diagramma di Bode del modulo alla pulsazione 1 assume il valore $-20dB$ corrispondenti a un guadagno, positivo, pari a 0.1.
Il regolatore progettato ha funzione di trasferimento:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)} = 0.001 \cdot \frac{(10s+1)}{s(0.1s+1)}$$

Domanda 4.2 Supponendo che $G(s)$ sia affetta da un ritardo di tempo τ, determinare il massimo valore di tale ritardo perché il sistema sia asintoticamente stabile in anello chiuso.

Come noto, la presenza di un ritardo di tempo porta ad un abbassamento del margine di fase pari a:

$$\Delta\varphi_m = -\tau\omega_c\frac{180°}{\pi}$$

Il valore di ritardo massimo è dunque quello per cui il nuovo margine di fase risulta nullo, dunque:

$$\tau_{max} : \varphi_m + \Delta\varphi_m = 0 \rightarrow \tau_{max} = \frac{\varphi_m\pi}{\omega_c 180°} = 1.27s$$

Domanda 4.3 Si discuta il ruolo del filtro anti-alias nell'implementazione digitale di un sistema di controllo e si illustrino le linee guida per la definizione della banda passante di tale componente.

Il filtro anti-alias consente di prevenire il fenomeno dell'aliasing dovuto al campionamento di componenti armoniche nella variabile d'uscita a pulsazioni maggiori rispetto alla pulsazione di Nyquist ω_N *(determinata dalla scelta del tempo di campionamento). Tali componenti sono tipicamente dovute al rumore di misura o all'effetto di disturbi non noti che agiscono sul sistema.*

La linea guida per una corretta definizione della banda passante di tale filtro (ω_B) *è espressa dalla seguente relazione tra la pulsazione critica* (ω_c) *e la pulsazione di Nyquist* ($\omega_N = \pi/T_s$)

$$\omega_c < \omega_B < \omega_N$$

che riassume le seguenti considerazioni:

- *la banda passante del filtro deve essere sufficientemente maggiore della pulsazione critica del sistema di controllo, in modo da interferire con il progetto del regolatore.*
- *la banda passante del filtro deve essere inferiore alla pulsazione di Nyquist, in modo tale da garantire un adeguato effetto filtrante delle componenti di rumore/disturbi a pulsazioni superiori a quella di Nyquist (che genererebbero aliasing).*