POLITECNICO MILANO 1863

Fondamenti di Automatica

a.a. 2022-2023

Prof. Rocco

21 Aprile 2023 - Prima prova in itinere

SOLUZIONI

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico non lineare tempo invariante in forma di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + 2x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2 - 2x_2 + (u-1) \\ y &= x_2\end{aligned}$$

Domanda 1.1 Si determinino lo stato e l'uscita di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u = \bar{u} = 1$.

$\bar{x}_1$:
$\bar{x}_2$:
$\bar{y}$:

All'equilibrio si ha:

$$\begin{aligned}0 &= \bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_1 + 1 \\ 0 &= -\bar{x}_1\bar{x}_2 - 2\bar{x}_2 \\ \bar{y} &= \bar{x}_2\end{aligned}$$

Lo stato e l'uscita di equilibrio sono:

$$\bar{x}_1 = -1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{y} = 0$$

Domanda 1.2 Si determinino le matrici A, B, C, D che descrivono il sistema linearizzato intorno allo stato di equilibrio calcolato al punto precedente, e si valuti la stabilità dell'equilibrio.

Linearizzando equazione per equazione si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{\delta x}_1 &= 2\bar{x}_1\delta x_1 + 2\delta x_1 + \delta u \\ \dot{\delta x}_2 &= -\bar{x}_2\delta x_1 - \bar{x}_1\delta x_2 - 2\delta x_2 + \delta u \\ \delta y &= \delta x_2\end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}\dot{\delta x}_1 &= \delta u \\ \dot{\delta x}_2 &= -\delta x_2 + \delta u \\ \delta y &= \delta x_2\end{aligned}$$

Le matrici A, B, C, D del sistema linearizzato sono

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; D = 0.$$

La matrice A del sistema linearizzato ha un autovalore nullo e uno a parte reale negativa. Pertanto, non è possibile trarre conclusioni sulla stabilità del punto di equilibrio.

Domanda 1.3 Si valuti se il sistema linearizzato precedentemente calcolato è osservabile e si dia un'interpretazione al risultato trovato, alla luce delle equazioni che lo descrivono.

La matrice di osservabilità è:

$$K_O = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

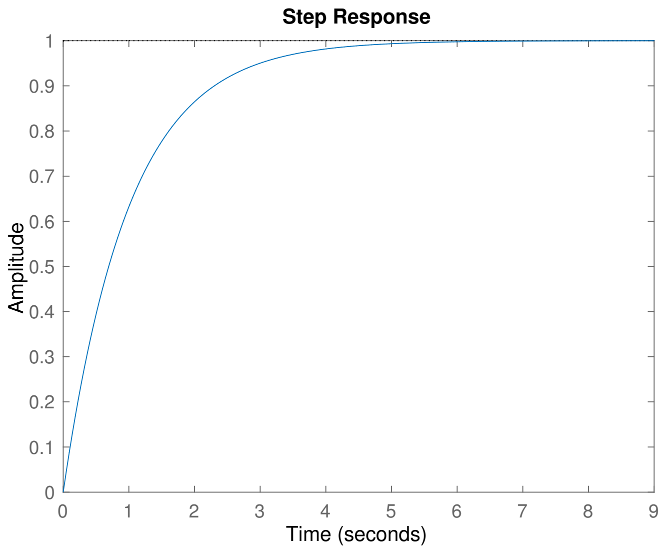
La matrice K_0 ha determinante nullo, quindi il sistema non è completamente osservabile.
L'analisi delle equazioni del sistema linearizzato mostra come la prima variabile di stato δx_1 non solo non compaia direttamente nella trasformazione d'uscita, ma non vada neanche in alcun modo ad influenzare la variabile δx_2, che invece compare nella trasformazione d'uscita.

Domanda 1.4 Si determini l'espressione della funzione di trasferimento per il sistema linearizzato precedentemente trovato e si tracci l'andamento temporale della risposta canonica allo scalino unitario.

$G(s) =$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

La risposta allo scalino unitario è:



Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(s)$, il cui diagramma di Bode del modulo è rappresentato nella Figura 1.

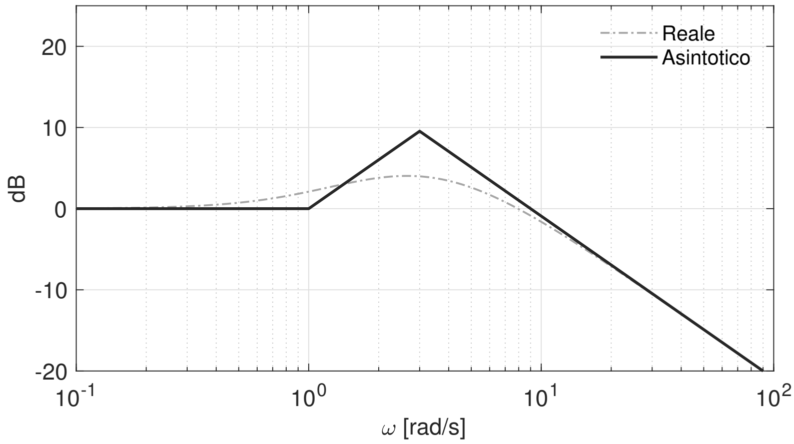


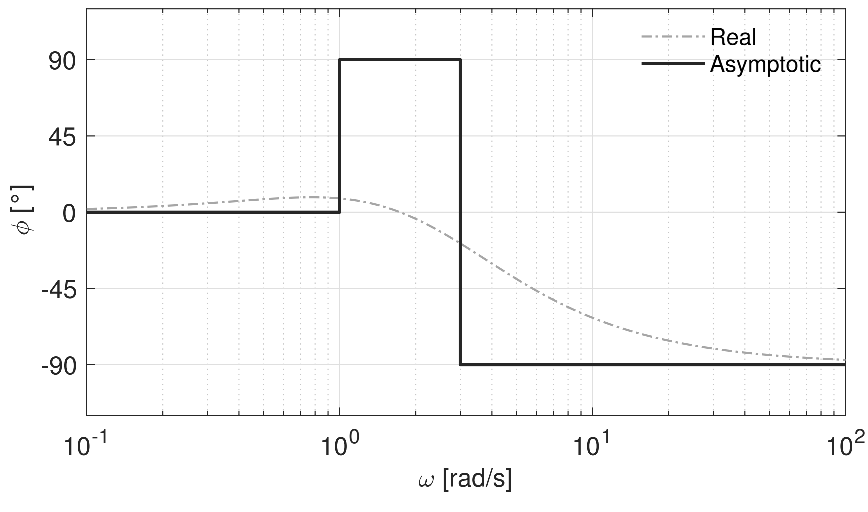
Figura 1: Diagramma di Bode del modulo di $G(s)$.

Domanda 2.1 Sapendo che $G(s)$ presenta poli e zeri reali e che è a fase minima, si tracci il diagramma di Bode asintotico della fase di $G(s)$.

Essendo il sistema a fase minima, è possibile ricavare il valore (asintotico) della fase di $G(s)$ utilizzando l'espressione:

$$\phi = k \cdot 90°$$

dove k è la pendenza del diagramma di Bode del modulo, espressa in multipli di 20db/dec. Il diagramma asintotico della fase è dunque quello rappresentato nella seguente figura.



Domanda 2.2 Si tracci il diagramma polare di $G(s)$.

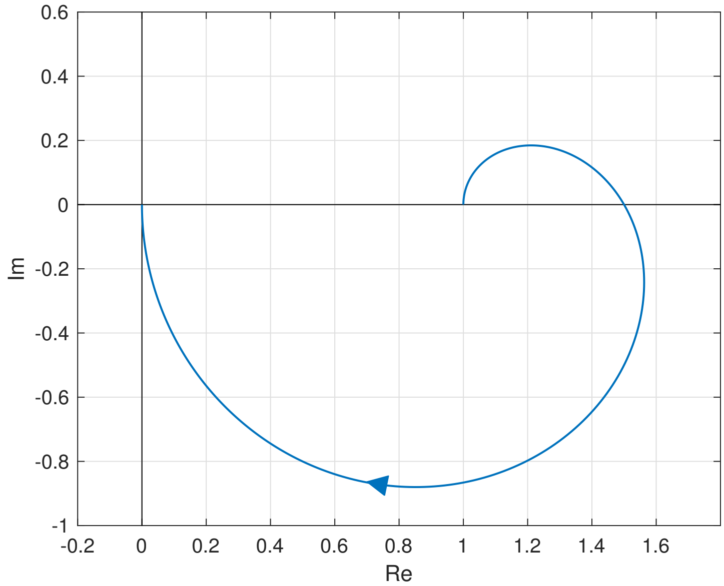
Grazie ai diagrammi di Bode reali di $G(s)$ è possibile individuare i seguenti punti notevoli:

ω	$\lvert G(j\omega)\rvert$	$\angle G(j\omega)$
$\to 0$	1	$0°$
$\to \infty$	0	$-90°$

Inoltre dai diagrammi di Bode si possono ricavare le seguenti informazioni:

- *Il modulo dapprima cresce, raggiunge il valore massimo e poi decresce.*
- *La fase dapprima cresce verso valori positivi; successivamente decresce fino a tendere a* $-90°$.

Il diagramma polare è dunque quello riportato nella seguente figura.



Domanda 2.3 Si ricavi l'espressione di $G(s)$.

$G(s) =$

Dai diagrammi di Bode si possono ricavare le seguenti caratteristiche:

- *Tipo nullo,* $g = 0$.
- *Guadagno positivo e pari a* $\mu_{db} = 1 \rightarrow \mu = 10^{0/20} = 1$.
- *Uno zero a parte reale negativa in* $\omega = 1$ *rad/s*
- *Due poli coincidenti a parte reale negativa in* $\omega = 3$ *rad/s*

Dunque la funzione di trasferimento risulta:

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(0.33s+1)^2}$$

Domanda 2.4 Si ricavi l'espressione analitica della risposta del sistema $y(t)$ ad uno scalino della variabile di ingresso $u(t) = \mathrm{sca(t)}$.

$y(t) =$

La trasformata di Laplace della risposta del sistema risulta:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{(s+1)}{(0.33s+1)^2} \cdot \frac{1}{s} = 9 \cdot \frac{(s+1)}{s(s+3)^2}$$

Lo sviluppo di Heaviside di $Y(s)$ risulta:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} + \frac{6}{(s+3)^2}$$

da cui, antitrasformando, si ricava l'espressione di $y(t)$:

$$y(t) = sca(\mathrm{t}) - e^{-3t} + 6t \cdot e^{-3t}$$

Esercizio 3

Si consideri lo schema a blocchi rappresentato in Figura 2.

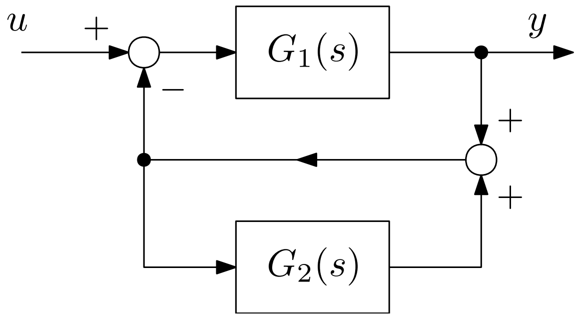
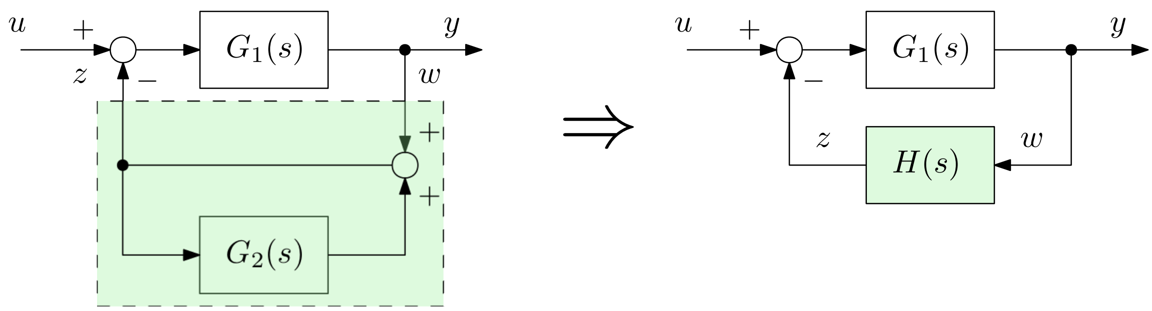


Figura 2: Schema a blocchi.

Domanda 3.1 Si calcoli la funzione di trasferimento $G(s)$ tra le variabili d'ingresso u e d'uscita y dello schema.

$G(s) =$

Lo schema a blocchi può essere interpretato riconoscendo una retroazione (negativa) tra la funzione $G_1(s)$ e la funzione $H(s)$, come esemplificato nella seguente figura:



$H(s)$ si calcola risolvendo la retroazione (positiva) che coinvolge la funzione $G_2(s)$:

$$H(s) = \frac{1}{1 - G_2(s)}$$

In conclusione, la funzione di trasferimento complessiva vale:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + \dfrac{G_1(s)}{1 - G_2(s)}} = \frac{G_1(s)(1 - G_2(s))}{1 - G_2(s) + G_1(s)} \qquad (1)$$

Domanda 3.2 Cosiderando $G_1(s) = \dfrac{\alpha}{s+10}$ e $G_2(s) = \dfrac{1}{s+1}$, si discuta per quali valori del parametro α la funzione di trasferimento $G(s)$, precedentemente individuata, risulta asintoticamente stabile.

α :

Sostituendo i valori di $G_1(s)$ e $G_2(s)$ nell'espressione (1), si ricava:

$$G(s) = \frac{\alpha s}{s^2 + (10 + \alpha)s + \alpha}.$$

Utilizzando la condizione necessaria e sufficiente di asintotica stabilità, applicata ai coefficienti del polinomio al denominatore di $G(s)$, si ricava che il sistema è asintoticamente stabile quando tutti i loro segni sono concordi, dunque per

$$\alpha > 0.$$

Domanda 3.3 Si determini, se possibile, un valore del parametro α per cui l'uscta del sistema a transitorio esaurito, in risposta ad uno scalino $u(t) = \text{sca(t)}$, converge al valore finale $y(\infty) = 10$.

α :

Supponendo il sistema asintoticamente stabile ($\alpha > 0$), la risposta asintotica del sistema ad uno scalino della variabile $u(t)$ si assesta al valore:

$$y(\infty) = G(0) \cdot 1 = 0.$$

Dunque, non esiste alcun valore di α in grado di soddisfare la richiesta.

Domanda 3.4 Considerando $\alpha = -1$ si calcolino, se possibile, il valore iniziale $y(0)$ e il valore finale $y(\infty)$ della risposta $y(t)$ del sistema all'impulso di ampiezza unitaria $u(t) = \text{imp}(t)$.

$y(0) \quad =$

$y(\infty) \quad =$

Per il calcolo del valore iniziale, è possibile applicare il teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot G(s) \cdot 1 = -1.$$

Per $\alpha = -1$ il sistema dinamico risulta instabile. Dunque, il valore finale della risposta all'impulso non è calcolabile con il teorema del valore finale e diverge all'infinito.