Fondamenti di Automatica

Prof. Rocco

13 Aprile 2022

SOLUZIONE

Fondamenti di Automatica
Proff. Giulio Panzani, Paolo Rocco e Gian Paolo Incremona

Prima prova intermedia
13 aprile 2022

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico non lineare tempo invariante in forma di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1x_2 + x_2\sin(u)\\ \dot{x}_2 &= x_2^2 - \cos(u)\\ y &= x_1 + x_2u\end{aligned}$$

Domanda 1.1 Si determinino gli stati e le uscite di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u = \bar{u} = 0$.

All'equilibrio si ha:

$$\begin{aligned}0 &= \bar{x}_1\bar{x}_2\\ 0 &= \bar{x}_2^2 - 1\\ \bar{y} &= \bar{x}_1\end{aligned}$$

Gli stati di equilibrio sono:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = \pm 1,$$

L'uscita di equilibrio in entrambi i casi è invece $y = 0$.

Domanda 1.2 Si determini l'espressione del sistema linearizzato intorno allo stato di equilibrio calcolato al punto precedente e caratterizzato da $\bar{x}_2 > 0$, e si valuti la stabilità dell'equilibrio.

Il sistema linearizzato nell'intorno del generico equilibrio è dato da

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}_1 &= \bar{x}_2\delta x_1 + (\bar{x}_1 + \sin(\bar{u}))\delta x_2 + \bar{x}_2\cos(\bar{u})\delta u\\ \delta\dot{x}_2 &= 2\bar{x}_2\delta x_2 + \sin(\bar{u})\delta u\\ \delta y &= \delta x_1 + \bar{u}\delta x_2 + \bar{x}_2\delta u\end{aligned}$$

Per l'equilibrio considerato si ha

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}_1 &= \delta x_1 + \delta u\\ \delta\dot{x}_2 &= 2\delta x_2\\ \delta y &= \delta x_1 + \delta u\end{aligned}$$

La matrice A del sistema linearizzato risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice A del sistema linearizzato ha due autovalori a parte reale positiva. Il sistema linearizzato e il corrispondente equilibrio sono quindi instabili.

Domanda 1.3 Si determini, utilizzando la definizione, l'espressione della funzione di trasferimento per il sistema linearizzato precedentemente trovato.

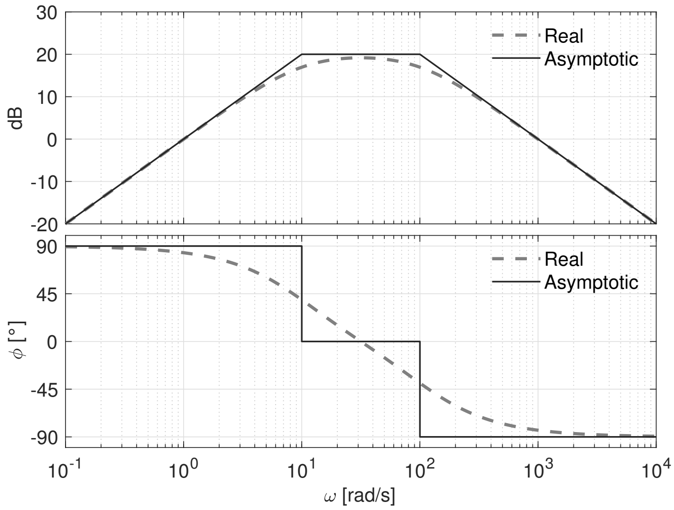
$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 = \frac{s}{s-1} \end{aligned}$$

Domanda 1.4 Sulla base dell'espressione della funzione di trasferimento ricavata al punto precedente, si spieghi se il sistema è completamente raggiungibile e osservabile.

Poiché il grado del denominatore della funzione di trasferimento è inferiore all'ordine del sistema linearizzato, nel formare la funzione di trasferimento avviene una cancellazione che dà luogo a una dinamica nascosta non osservabile e/o non raggiungibile.

Esercizio 2

Si consideri il sistema LTI con funzione di trasferimento $G(s)$, i cui diagrammi di Bode della risposta in frequenza sono riportati nella seguente figura:



Domanda 2.1 Si indichi (motivando adeguatamente la risposta) quale delle seguenti funzioni di trasferimento è quella corretta e si calcoli il valore del parametro T.

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+10)(Ts+1)} \quad G_2(s) = \frac{10s}{(-s+10)(Ts+1)} \quad G_3(s) = \frac{10s}{(s+10)(Ts+1)} \quad G_4(s) = \frac{Ts+1}{s(-0.1s+1)}$$

Da diagramma di Bode si possono ricavare le seguenti caratteristiche di $G(s)$

1. *Poiché la pendenza iniziale ($\omega \to 0$) è pari a 20 db/dec, $G(s)$ presenta uno zero nell'origine. Dunque il tipo è pari a $g = -1$.*

2. *In corrispondenza di $\omega = 10$ rad/s e $\omega = 100$ rad/s sono presenti due poli (la pendenza diminuisce di 20 db/dec). Dal grafico della fase si ricava che i poli sono nel semipiano sinistro, visto che per entrambi si ha una decrescita della fase.*

Usando le informazioni (1.) e (2.) è possibile rispondere alla domanda. Infatti $G_1(s)$ presenta un polo nell'origine, $G_2(s)$ ha un polo nel semipiano destro, $G_4(s)$ oltre al polo nell'origine ha un solo polo reale nel semipiano destro. La risposta corretta è dunque $G_3(s)$.
Per calcolare T occorre imporre che

$$\omega_{p2} = 100 = \frac{1}{|T|} \quad \to |T| = 0.01.$$

Inoltre, essendo il polo nel semipiano sinistro, $T > 0$, dunque $T = 0.01$.

Domanda 2.2 Aiutandosi con i diagrammi di Bode sopra rappresentati, si calcoli approssimativamente l'uscita del sistema $y(t)$ a transitorio esaurito, a fronte dell'ingresso

$$u(t) = 2 + 0.5\sin(30t).$$

Poiché il sistema è lineare tempo invariante, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e calcolare l'uscita a transitorio esaurito separando i due contributi del segnale di ingresso

$$u(t) = u_1 + u_2 \quad \rightarrow \quad y(t) = y_1 + y_2$$

Per calcolare y_1 è sufficiente moltiplicare il valore dell'ingresso costante per il guadagno statico del sistema ottenendo:

$$y_1 = G(0) \cdot u_1 = 0 \cdot 2 = 0.$$

Per il calcolo di y_2 è invece necessario utilizzare il teorema della risposta in frequenza:

$$y_2 = 0.5|G(j \cdot 30)| \sin(30t + \angle G(j \cdot 30))$$

dove i valori di $|G(j \cdot 30)|$ e $\angle G(j \cdot 30)$ possono essere ricavati dai diagrammi di Bode, in corrispondenza di $\omega = 30$ rad/s. In particolare:

- $|G(j \cdot 30)| \approx 10$
- $\angle G(j \cdot 30) \approx 0$

Dunque:

$$y_2 = 0.5 \cdot 10\sin(30t + 0°) = 5\sin(30t)$$

Domanda 2.3 Calcolare la risposta analitica $y(t)$ del sistema, a fronte dell'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$.

Avendo a disposizione l'espressione di $G(s)$ è possibile ricavare la trasformata di Laplace dell'uscita del sistema

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{10s}{(s+10)(0.01s+1)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1000}{(s+10)(s+100)}$$

Applicando Heaviside (caso poli reali distinti) si ottiene:

$$Y(s) = \frac{1000}{(s+10)(s+100)} = \frac{1000/90}{(s+10)} + \frac{-1000/90}{(s+100)}$$

Dunque, la risposta allo scalino è:

$$y(t) = \frac{1000}{90}e^{-10t} - \frac{1000}{90}e^{-100t} \qquad t \geq 0$$

Domanda 2.4 Tracciare il diagramma polare di $G(s)$.

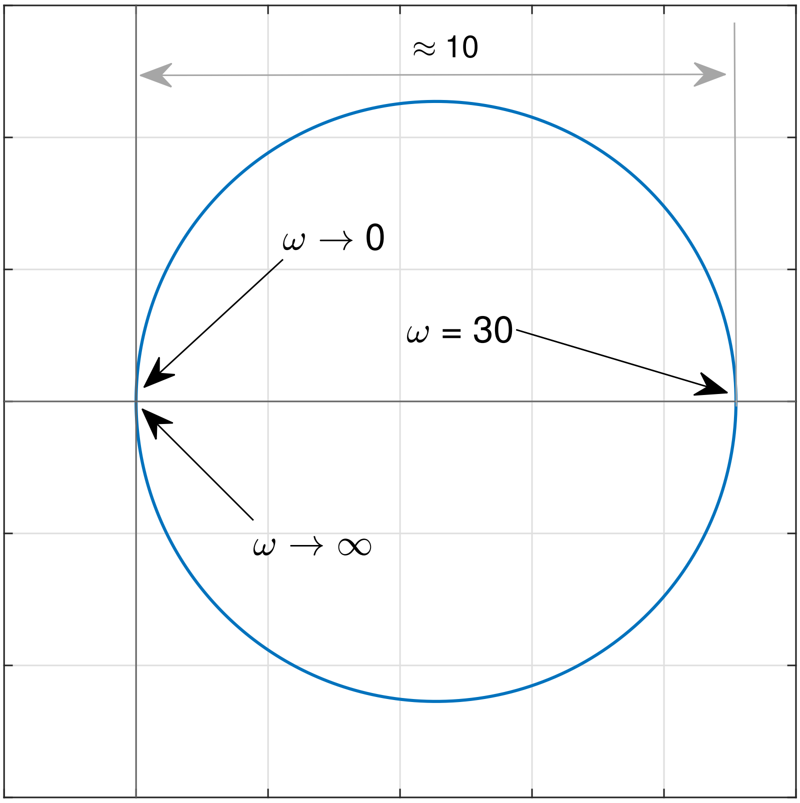
Grazie ai diagrammi di Bode reali di $G(s)$ è possibile individuare i seguenti punti notevoli:

ω	$\|G(j\omega)\|$	$\angle G(j\omega)$
$\to 0$	0	$90°$
≈ 30	≈ 10	$\approx 0°$
$\to \infty$	0	$-90°$

Inoltre dai diagrammi di Bode si possono ricavare le seguenti informazioni:

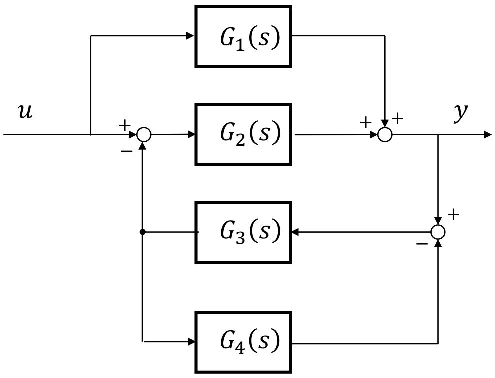
- *Il modulo cresce, raggiunge il valore massimo di circa 10 e poi decresce*
- *La fase decresce progressivamente da +90 a -90 gradi*

Il diagramma polare è dunque quello riportato nella seguente figura.



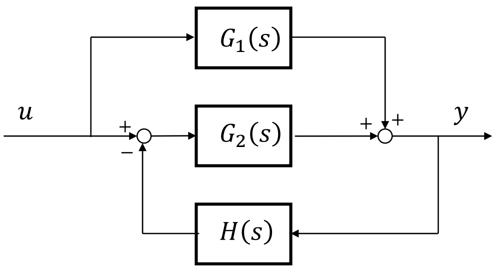
Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi di figura:



Domanda 3.1 Elaborando lo schema a blocchi, si determini l'espressione della funzione di trasferimento dall'ingresso u all'uscita y.

Nella parte inferiore dello schema a blocchi si riconosce una connessione in retroazione negativa con linea d'andata $G_3(s)$ e linea di retroazione $G_4(s)$. Lo schema a blocchi si può quindi semplificare come in figura:



dove:

$$H(s) = \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)}$$

A questo punto il sistema corrisponde a uno schema di retroazione negativa con in linea d'andata il parallelo tra $G_1(s)$ e $G_2(s)$ e come funzione di trasferimento d'anello la serie tra $G_2(s)$ e $H(s)$. Pertanto:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_2(s)H(s)} = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_2(s)\frac{G_3(s)}{1+G_3(s)G_4(s)}} \\ &= \frac{(G_1(s) + G_2(s))\,(1 + G_3(s)G_4(s))}{1 + G_3(s)G_4(s) + G_2(s)G_3(s)}\end{aligned}$$

Domanda 3.2 Si spieghi se è necessario e/o sufficiente che una o più delle funzioni di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$ sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema nel suo complesso.

Poiché $G_1(s)$ non è chiusa in alcun anello di retroazione, è necessario che sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema nel suo complesso. Nulla invece si può dire riguardo alle altre funzioni di trasferimento.

Domanda 3.3 Posto ora $G_1(s) = 0$, $G_2(s) = \frac{\alpha}{(1+s)^2}$, $G_3(s) = \frac{1}{s}$ e $G_4(s) = 2$ si determini l'intervallo dei valori del parametro α per cui il sistema complessivo è asintoticamente stabile.

Sostituendo le espressioni delle singole funzioni di trasferimento, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{\alpha}{(1+s)^2}\left(1+\frac{2}{s}\right)}{1+\frac{2}{s}+\frac{\alpha}{s(1+s)^2}} = \frac{\alpha(s+2)}{s(1+s)^2+2(1+s)^2+\alpha} = \\ &= \frac{\alpha(s+2)}{s^3+4s^2+5s+2+\alpha} \end{aligned}$$

Per discutere la stabilità al variare di α occorre compilare la tabella di Routh:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2+\alpha & 0 \\ \frac{18-\alpha}{4} & 0 & 0 \\ 2+\alpha & 0 & 0 \end{array}$$

Affinché il sistema sia asintoticamente stabile, tutti gli elementi della prima colonna della tabella devono essere dello stesso segno, il che avviene per $-2 < \alpha < 18$.

Domanda 3.4 Sempre mantenendo l'espressione delle funzioni di trasferimento del punto precedente, si determini il parametro α in modo che il guadagno della funzione di trasferimento dall'ingresso u all'uscita y assuma valore 1. Che valore assume in questo caso l'uscita a transitorio esaurito quando l'ingresso subisce una variazione $u(t) = 2sca(t)$?

Il guadagno della funzione di trasferimento si ottiene come:

$$\mu = G(0) = \frac{2\alpha}{2+\alpha}$$

Esso vale 1 quando $\alpha = 2$. Poiché questo valore rientra nell'insieme dei valori per cui il sistema è asintoticamente stabile, l'uscita a transitorio esaurito è pari al valore del guadagno per l'ampiezza dello scalino, ossia è pari a 2.