Fondamenti di Automatica

a.a. 2022-2023

Prof. Rocco

13 Giugno 2023 - Appello

SOLUZIONI

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico lineare tempo invariante descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \alpha x_1(t) - 2x_2(t) \\
y(t) &= x_1(t) + u(t)
\end{aligned}$$

Domanda 1.1 Si indichi per quali valori del parametro reale α il sistema è asintoticamente stabile.

α :

Il polinomio caratteristico del sistema è $\chi(s) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 - \alpha$, da cui si ricava che il sistema è asintoticamente stabile per $\alpha < 6$.

Domanda 1.2 Si determini la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema quando $\alpha = 0$.

$G(s) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$

La funzione di trasferimento è:

$$\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 = \frac{s+4}{s+3}
\end{aligned}$$

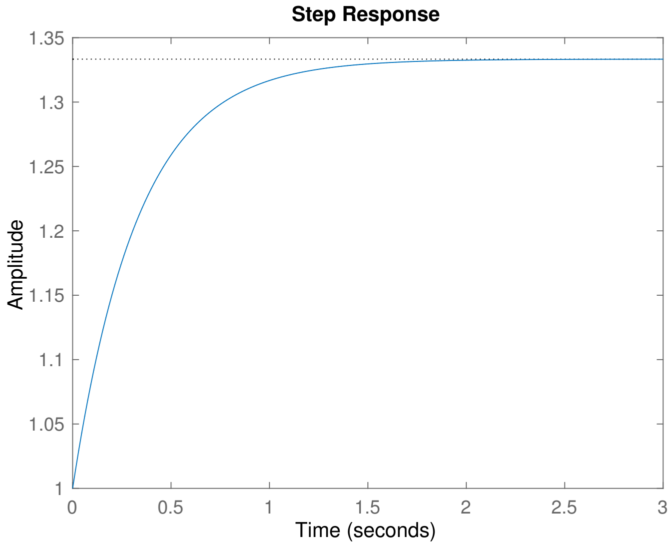
Domanda 1.3 Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino unitario di $G(s)$, giustificandone le principali caratteristiche.

La funzione di trasferimento appartiene alla classe:

$$G(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{1 + sT}$$

con $\mu = \frac{4}{3}$, $\tau = \frac{1}{4}$ e $T = \frac{1}{3}$. La risposta allo scalino parte quindi dal valore $\mu\frac{\tau}{T} = 1$ e, con un transitorio esponenziale con costante di tempo $T = \frac{1}{3}$, tende asintoticamente al valore del guadagno $\mu = \frac{4}{3}$.
L'andamento qualitativo della risposta allo scalino unitario è quindi il seguente:

Domanda 1.4 Considerando la $G(s)$ trovata al punto precedente, si ricavi, se possibile, l'espressione a transitorio esaurito della risposta $y(t)$ quando $u(t) = 5\sin(10t)$.



$$\boxed{y(t) = \qquad\qquad\qquad}$$

Applicando il teorema della risposta sinusoidale, applicabile vista l'asintotica stabilità del sistema, si ha che:

$$y(t) = B\sin(10t + \psi)$$

dove

$$B = 5 \cdot |G(j \cdot 10)| = 5.16, \quad \psi = \arg G(j \cdot 10) = -0.09$$

Esercizio 2

Si consideri un sistema dinamico retroazionato negativamente, con funzione d'anello:

$$L(s) = \rho \, \frac{s-2}{s(s+3)^2}$$

Domanda 2.1 Tracciare il luogo delle radici diretto.

La funzione di trasferimento può essere scritta nella forma:

$$L(s) = \rho \, \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

con $m = 1$, $n = 3$, $z_1 = -2$, $p_1 = 0$, $p_2 = p_3 = 3$. *Sia il luogo diretto sia il luogo inverso presentano* $n - m = 2$ *asintoti. Come è noto, tali asintoti formano angoli di* $90°$ *e* $270°$ *con l'asse reale nel luogo diretto e coincidono con il semiasse reale positivo e negativo nel luogo inverso. Il punto di incontro degli asintoti sull'asse reale è individuato dall'ascissa:*

$$x_a = \frac{\sum z_i - \sum p_i}{n-m} = -4$$

Con queste informazioni e ricordando la regola di appartenenza dei punti dell'asse reale al luogo si può tracciare il luogo delle radici diretto come in Figura 1.

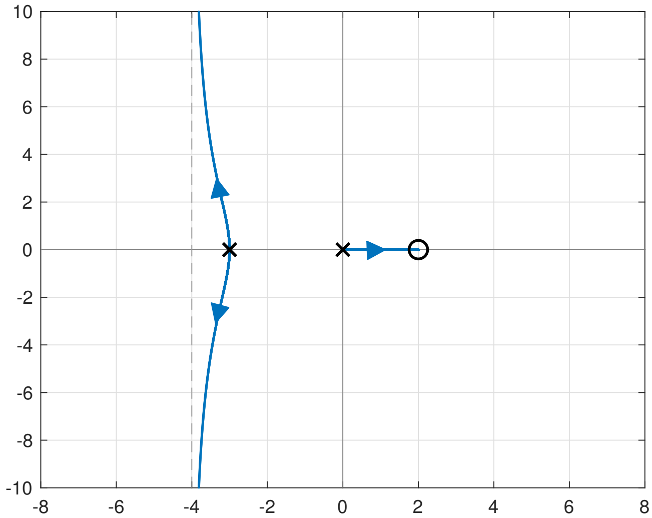


Figura 1: Luogo delle radici diretto.

Domanda 2.2 Tracciare il luogo delle radici inverso.

Il luogo delle radici inverso è rappresentato in Figura 2.

Domanda 2.3 Indicare per quali valori del parametro ρ il sistema in anello chiuso risulta asintoticamente stabile.

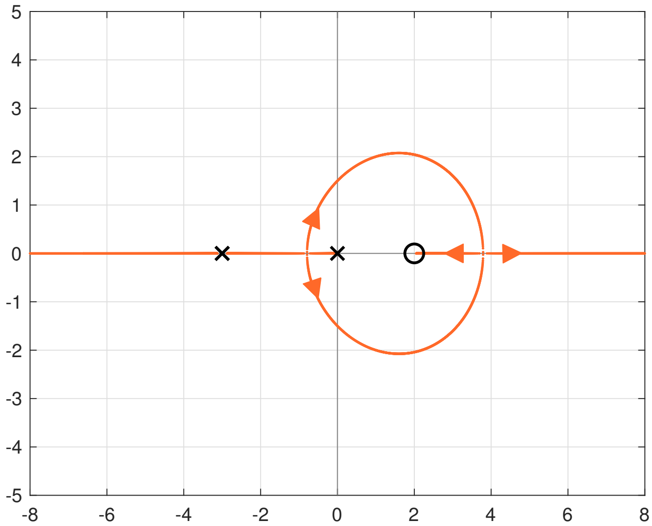


Figura 2: Luogo delle radici diretto.

ρ :

Dall'analisi dei luoghi delle radici risulta che:

- *il sistema in anello chiuso non è mai asintoticamente stabile quando $\rho > 0$, avendo sempre almeno un polo nel semipiano destro.*
- *il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per $\bar{\rho} \leq \rho \leq 0$, dove $\bar{\rho}$ è il valore della costante di trasferimento per cui i poli del luogo inverso giacciono sull'asse immaginario. Per ricavare tale valore, non è possibile applicare direttamente la regola della punteggiatura, in quanto non è nota la parte immaginaria dei poli, e dunque la loro esatta posizione. Applicando la regola del baricentro, che si applica in quanto $n - m \geq 2$, è possibile trovare la posizione del rimanente polo del sistema. Infatti la somma delle parti reali dei poli si conserva e vale -6 per cui per il valore $\bar{\rho}$ per cui due poli hanno parte reale nulla, il terzo avrà parte reale -6, ossia si troverà nel punto dell'asse reale $\bar{s} = -6$. Applicando ora la regola della punteggiatura in $\bar{s}$ e ricordando che stiamo considerando il luogo inverso, si ottiene:*

$$\bar{\rho} = -\frac{3 \cdot 3 \cdot 6}{8} = -\frac{27}{4}.$$

In conclusione, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile quando:

$$-\frac{27}{4} < \rho < 0$$

.

Domanda 2.4 È possibile trovare un valore di ρ per cui il sistema abbia almeno un polo in anello chiuso con parte reale -3.5 e sia asintoticamente stabile?

Sì. Sicuramente questo non può accadere quando $\rho > 0$: in questa situazione, rappresentata dal luogo diretto, è possibile che i due poli complessi coniugati abbiano parte reale pari a -3.5, ma il sistema retroazionato non risulta asintoticamente stabile. Considerando il luogo inverso, invece, quando il *sistema in anello chiuso è nella condizione limite di stabilità, il polo reale si trova in* $\bar{s} = -6$. *Dunque, esiste sicuramente un valore di* $\rho < 0$ *per cui il polo reale sarà in* $s = -3.5$ *e gli altri due poli avranno comunque parte reale negativa.*

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema di controllo digitale

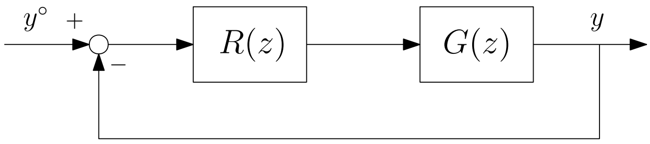


Figura 3: Schema di controllo digitale.

dove $R(z) = \dfrac{z+0.5}{z-1}$ è la funzione di trasferimento a tempo discreto che implementa il regolatore, mentre $G(z) = \dfrac{0.5}{z^2+0.5z}$ è il sistema dinamico a tempo discreto da controllare.

Domanda 3.1 Si discuta la stabilità del sistema da controllare $G(z)$.

I poli del sistema $G(z)$ si trovano in $z_1 = 0$ e $z_2 = -0.5$. Avendo entrambi modulo inferiore a 1, è possibile affermare che il sistema $G(z)$ è asintoticamente stabile.

Domanda 3.2 Calcolare i primi 6 campioni della risposta all'impulso di $G(z)$, verificandone l'andamento oscillante attorno al valore 0. A quale caratteristica del sistema $G(z)$ è imputabile tale comportamento?

$y(0) =$	$y(1) =$	$y(2) =$	$y(3) =$	$y(4) =$	$y(5) =$

Applicando il metodo della lunga divisione alla trasformata dell'uscita $Y(z) = G(z) \cdot 1$, si ottiene:

$$Y(z) = 0.5z^{-2} - 0.25z^{-3} + 0.125z^{-4} - 0.0625z^{-5}.$$

Quindi i primi 6 valori della risposta all'impulso sono:

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 0 \quad y(2) = 0.5 \quad y(3) = -0.25 \quad y(4) = 0.125 \quad y(5) = -0.0625.$$

Il comportamento oscillante della risposta è imputabile alla presenza del polo reale a parte reale negativa compreso tra -1 e 0 che, a nei sistemi a tempo discreto, è associato a modi oscillanti.

Domanda 3.3 Si scriva l'equazione alle differenze che implementa il regolatore $R(z)$, esplicitando il procedimento seguito per ottenerla.

$u(k) =$

$$R(z) = \frac{z+0.5}{z-1} = \frac{1+0.5z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)} \qquad \to \qquad U(z) = z^{-1}U(z) + E(z) + 0.5z^{-1}E(z)$$

Antitrasformando e ricordando il significato dell'operatore z^{-1} si ottiene l'equazione alle differenze:

$$u(k) = u(k-1) + e(k) + 0.5e(k-1)$$

Domanda 3.4 Si ricavi l'espressione della funzione di trasferimento in anello chiuso $H(z)$ tra il riferimento $y^\circ(k)$ e l'uscita $y(k)$, discutendone la stabilità e indicandone il valore del guadagno μ_H. Quale proprietà del regolatore $R(z)$ giustifica il valore di μ_H ottenuto?

$$H(z) = \frac{\qquad}{\qquad} \qquad \mu_H =$$

La funzione richiesta è la funzione di sensitività complementare:

$$F(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} = \frac{R(z)G(z)}{1+R(z)G(z)} = \frac{0.5}{z^2 - z + 0.5}$$

Si noti che, nel calcolo di $L(z)$, la cancellazione del polo non è da considerarsi critica, in quanto coinvolge un polo a parte reale negativa del sistema. La funzione presenta due poli in

$$z = 0.5 \pm j0.5$$

che, avendo modulo minore di 1, portano a concludere come il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.
Considerando che $F(z)$ non presenta singolarità in $z = 1$, il guadagno si può calcolare come:

$$\mu = \lim_{z \to 1} F(z) = 1$$

Il valore ricavato è consistente con il fatto che il regolatore $R(z)$ presenta un'azione integrale (riconoscibile dal polo in $z = 1$) che, come ben noto, garantisce di ottenere errore a transitorio esaurito nullo a fronte di un ingresso a scalino, ossia guadagno della funzione di sensitività complementare unitario.

Esercizio 4

Si consideri il sistema di controllo schematizzato nella Figura 4

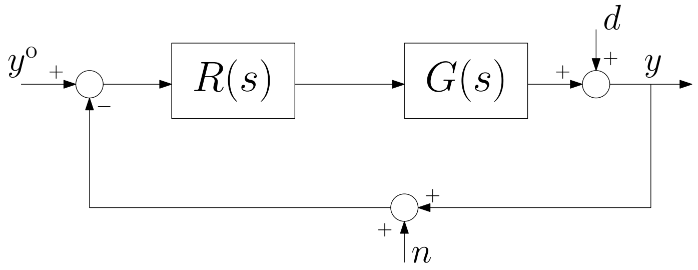


Figura 4: Sistema di controllo.

dove

$$G(s) = 10\,\frac{1 - 0.1s}{1 + s}$$

Domanda 4.1 Si progetti un regolatore in modo da soddisfare i seguenti requisiti:

1. l'errore a transitorio esaurito sia $e_\infty = 0$ quando $y^\circ = \text{sca}(t)$
2. il disturbo $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, con $\bar{\omega} \leq 0.1$ rad/s, sia attenuato a regime, sull'uscita y, di un fattore almeno pari a 10
3. il disturbo $n(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, con $\bar{\omega} \geq 30$ rad/s, sia attenuato a regime, sull'uscita y, di un fattore almeno pari a 100
4. il margine di fase sia $\varphi_m \geq 70^\circ$
5. la pulsazione critica sia tale che $\omega_c \geq 1$ rad/s

A conclusione del progetto, si riporti l'espressione del regolatore:

$$\boxed{R(s) = \qquad\qquad\qquad}$$

Progetto statico
La specifica sull'errore a transitorio esaurito richiede che il tipo della funzione d'anello sia $g_L = 1$. *Essendo* G *di tipo 0, questo comporta che il regolatore deve essere di tipo* $g_R = 1$, *mentre non vi sono vincoli sul valore de guadagno* μ_R. *Possiamo porre convenzionalmente* $\mu_R = 1$ *e chiudere il progetto statico con la funzione di trasferimento:*

$$R_1(s) = \frac{\mu_r}{s^{g_R}} = \frac{1}{s}$$

Attenuazione dei disturbi
La specifica sull'attenuazione del disturbo d *comporta che:*

$$\frac{1}{|L(j\cdot\bar{\omega})|} \leq 0.1 \quad \rightarrow \quad |L(j\cdot\bar{\omega})|_{db} \geq 20db \quad per \quad \bar{\omega} \leq 0.1\, rad/s$$

La specifica sull'attenuazione del disturbo n *comporta invece che:*

$$|L(j\cdot\bar{\omega})| \leq 0.01 \quad \rightarrow \quad |L(j\cdot\bar{\omega})|_{db} \leq -40db \quad per \quad \bar{\omega} \geq 30\, rad/s$$

Entrambe le specifiche si traducono quindi in zone proibite per l'andamento del diagramma di Bode del modulo di L.

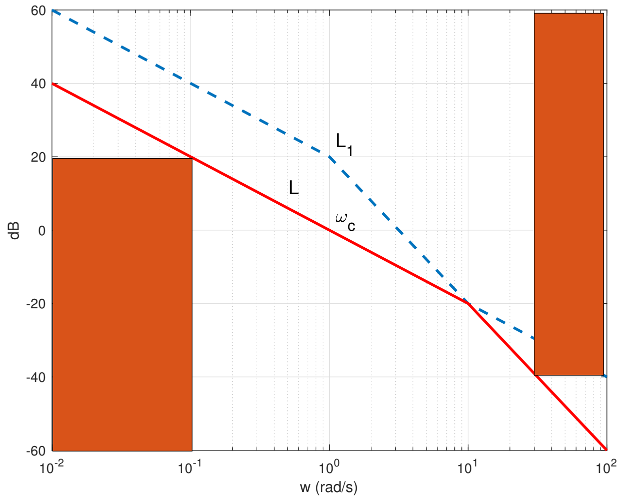
Progetto dinamico
A valle del progetto statico, la funzione di trasferimento d'anello è:

$$L_1(s) = \frac{10}{s}\frac{1-0.1s}{1+s}$$

Tracciandone il diagramma di Bode del modulo ci si rende subito conto che il margine di fase è del tutto insufficiente. Occorre quindi procedere al progetto dinamico.
Prendiamo come pulsazione critica la minima consentita, $\omega_c = 1$ e tagliamo l'asse a 0 dB con un tratto di pendenza -1. In bassa frequenza, non emergendo vincoli sul guadagno del regolatore dal progetto statico, si può far correre il diagramma di Bode del modulo di $|L|$ parallelo a quello di $|L_1|$, evitando così la prima zona proibita. Alla pulsazione 10 va mantenuto lo zero nel semipiano destro, tuttavia la pendenza del diagramma deve scendere a -2 per evitare la seconda zona proibita, risultato che si può ottenere aggiungendo due poli alla pulsazione 10.
La funzione d'anello candidata è quindi:

$$L(s) = \frac{1}{s}\frac{1-0.1s}{(1+0.1s)^2}$$

e il suo diagramma di Bode del modulo è tracciato in figura:
Si ottiene il margine di fase:



$$\phi_m = 180 - |-90 - \arctan(0.1) - 2\arctan(0.1)| = 72.86°$$

La funzione d'anello $L(s)$ rispetta tutte le specifiche di progetto.

Espressione del regolatore $R(s)$
Il regolatore ottenuto nel progetto dinamico ha funzione di trasferimento:

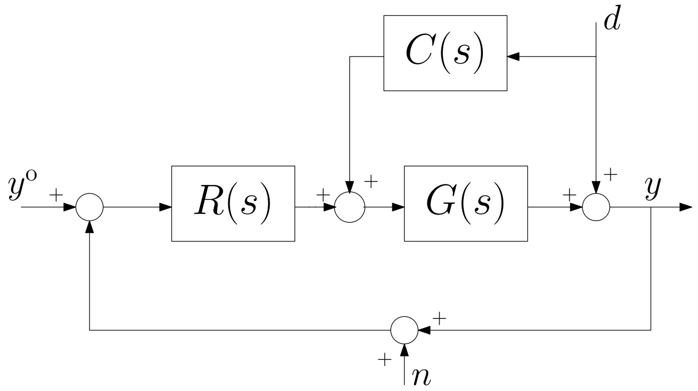
$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = 0.1 \cdot \frac{1+s}{(1+0.1s)^2}$$

Nel suo complesso il regolatore ha quindi la seguente funzione di trasferimento:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{0.1}{s} \cdot \frac{1+s}{(1+0.1s)^2}$$

Domanda 4.2 Si disegni lo schema a blocchi del sistema di controllo del presente esercizio comprensivo di un compensatore del disturbo d.

Lo schema a blocchi del sistema di controllo comprensivo di un compensatore del disturbo d è:



Domanda 4.3 Senza determinarne la funzione di trasferimento, si scriva la relazione che deve essere soddisfatta dalla risposta in frequenza del compensatore affinché l'effetto di un disturbo $d(t) = \sin(0.1t)$ sia annullato a transitorio esaurito sull'uscita y.

La relazione è la seguente:

$$C(0.1j)G(0.1j) + 1 = 0$$

Pertanto:

$$C(0.1j) = -\frac{1}{G(0.1j)} = -0.1 \cdot \frac{(1 + 0.1j)}{(1 - 0.01j)}$$