Fondamenti di Automatica

(Prof. Rocco)

Seconda prova scritta intermedia

Anno accademico 2013/2014

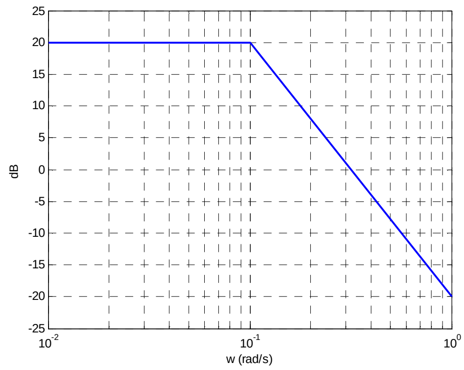
30 Giugno 2014

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Il diagramma di Bode del modulo di L taglia l'asse a 0 dB approssimativamente alla pulsazione 0.3 rad/s.



Calcolo del margine di fase:

$$\varphi_c = -2\arctan\left(\frac{0.3}{0.1}\right) - \omega_c \tau \frac{180°}{\pi} = -2\times 71.5° - 0.3\times 57.3° \approx -160°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_m = 20°$$

In base al criterio di Bode il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

1.2

Poiché il margine di fase è piccolo, è opportuno approssimare la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso con quella di un sistema del secondo ordine. Lo smorzamento ξ dei poli può essere valutato con la formula:

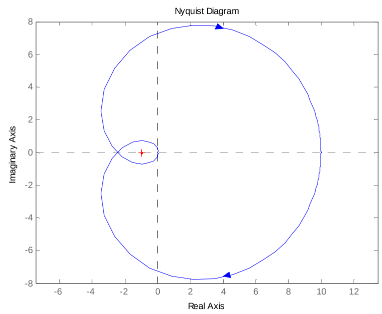
$$\xi = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) = 0.17$$

Tempo di assestamento al 99%: $\tau_{a1} = \dfrac{\ln(100)}{\xi\omega_c} = \dfrac{4.6}{0.17\times 0.3} = 90.2$

1.3

La funzione di trasferimento d'anello risulta:

$$L(s) = \frac{\mu}{(1+10s)^4}.$$



Il diagramma polare di L si traccia facilmente tenendo conto che la fase passa da 0 a –360°. Di conseguenza si traccia il diagramma di Nyquist (in figura è tracciato per $\mu = 10$).

1.4

Occorre determinare dapprima la pulsazione per cui la fase di L vale –180°:

$$\angle L(j\omega_\pi) = \angle \frac{\mu}{(1+10j\omega_\pi)^4} = -4\angle(1+10j\omega_\pi) = -4\arctan(10\omega_\pi) = -180° \quad \Rightarrow \quad \arctan(10\omega_\pi) = 45° \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi = 0.1$$

Si procede quindi al calcolo del modulo di L a tale pulsazione:

$$|L(j\omega_\pi)| = \left|\frac{\mu}{(1+10j\omega_\pi)^4}\right| = \frac{\mu}{|1+10j\omega_\pi|^4} = \frac{\mu}{|1+j|^4} = \frac{\mu}{\sqrt{2}^4} = \frac{\mu}{4}$$

Per il criterio di Nyquist il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist non compie giri intorno al punto –1, il che avviene per $\mu < 4$.

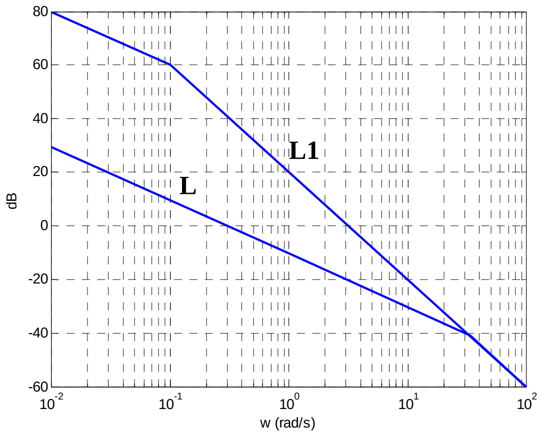
Esercizio 2

2.1

Poiché $G(s)$ è di tipo 1, l'errore a transitorio esaurito prodotto da un riferimento a scalino è nullo anche per regolatore di tipo zero, qualunque sia il guadagno del regolatore. Formalmente potremo porre:

$$R_1(s)=1 \quad \Rightarrow \quad L_1(s)=R_1(s)G(s)=G(s).$$

Il tracciamento del diagramma del modulo di L_1 evidenzia che occorre procedere al progetto dinamico per soddisfare i requisiti sul margine di fase. Tracciato il modulo di L come in figura, si ottiene ω_c = 0.3, mentre la fase critica e il margine di fase valgono:



$$\varphi_c=-90°-2\times\arctan(0.3)-\arctan(0.01)=-90°-2\times16.7°-0.5°=-124°$$

$$\varphi_m=180°-|\varphi_c|=180°-124°=56°$$

(si osservi il contributo della coppia zero-polo alla pulsazione 1).

Le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s)=\frac{0.3}{s}\frac{1-s}{(1+0.03s)(1+s)},$$

da cui si ottiene l'espressione della funzione di trasferimento, del primo ordine:

$$R(s)=\frac{L(s)}{G(s)}=0.003\frac{1+10s}{1+0.03s}.$$

2.2

A regime l'uscita forzata da n risulta:

$$y(t)=|H(j\omega)|\sin(\omega t+\angle H(j\omega)),$$

con $H(s)=-L(s)/(1+L(s))$. Occorre quindi determinare l'insieme delle pulsazioni per cui risulta:

$$|H(j\omega)|=\frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|}\approx|L(j\omega)|\le\frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad |L(j\omega)|_{dB}\le-40dB,$$

dove l'approssimazione è valida per valori di pulsazione decisamente maggiori della pulsazione critica. Per ispezione del grafico l'intervallo dei valori è dato da $\omega > 30$ rad/s.

2.3

Si può determinare il tempo di campionamento facendo in modo che la pulsazione di Nyquist sia decisamente superiore alla pulsazione critica. Tenendo conto della necessità di inserire un filtro anti-aliasing, si possono separare le due pulsazioni di due decadi:

$$\Omega_N=100\omega_c=30 \quad \Rightarrow \quad T=\frac{\pi}{30}\approx0.1.$$

2.4

Il filtro anti-aliasing deve avere guadagno unitario, tagliare dopo ω_c ma prima di Ω_N. Una scelta possibile è quindi:

$$F_a(s)=\frac{1}{1+s/3}=\frac{1}{1+0.33s}$$

Esercizio 3

3.1

La funzione di trasferimento d'anello si può riscrivere nel modo seguente:

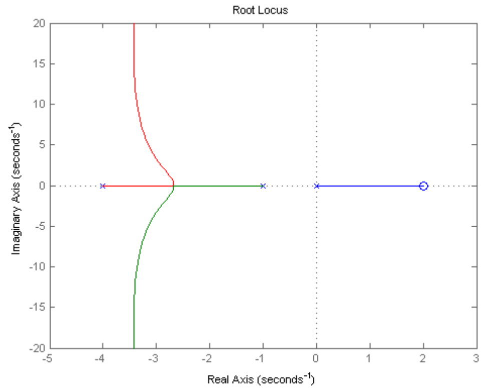
$$L(s) = \rho \frac{s-2}{s(s+1)(s+4)}$$

dove $\rho = -2k$.

Risulta $m = 1$, $n = 3$, $z_1 = -2$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 4$. Vi sono quindi due asintoti, il cui punto di intersezione è:

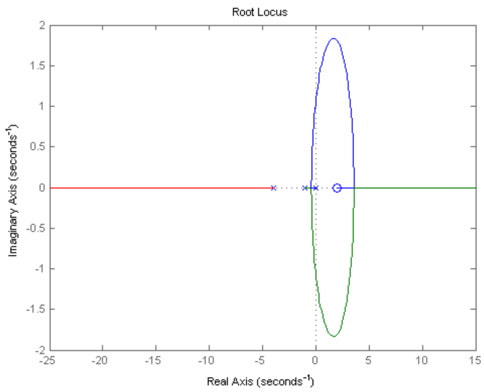
$$x_a = \frac{\sum z_i - \sum p_i}{n-m} = \frac{-2-(1+0+4)}{2} = -\frac{7}{2}$$

Il luogo diretto è tracciato in figura:



3.2

Il luogo inverso è tracciato in figura:



3.3

Nel luogo diretto non esistono valori di ρ (e di conseguenza non esistono valori di k) per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile

Poiché la somma delle parti reali dei poli si conserva e vale -5, si può punteggiare il luogo inverso nel punto $\bar{s} = -5$:

$$\rho_m = -\frac{1 \times 4 \times 5}{7} = -\frac{20}{7}$$

Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se: $-\frac{20}{7} < \rho < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < k < \frac{10}{7}$

3.4

Il polinomio caratteristico in anello chiuso è il seguente:

$$\chi(s) = k(1-0.5s) + s(1+s)(1+0.25s) = 0.25s^3 + 1.25s^2 + (1-0.5k)s + k = 0.25\left(s^3 + 5s^2 + 2(2-k)s + 4k\right)$$

Applicando il criterio di Routh

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2(2-k) & 0 \\ 5 & 4k & 0 \\ -2\dfrac{7k-10}{5} & 0 & \\ 4k & & \end{array}$$

Il sistema è asintoticamente stabile per $0 < k < \frac{10}{7}$.

Esercizio 4

4.1

Il sistema ha due poli reali $z_1 = -2$ e $z_2 = \frac{1}{2}$.

Essendo uno dei poli a modulo maggiore di 1, il sistema è instabile.

4.2

Risulta:

$$Y(z) = G(z)U(z) = 2\frac{z-1}{2z^2+3z-2}\frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1/2)(z+2)}$$

Sviluppiamo $Y(z)/z$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1/2)(z+2)} = \frac{\alpha_1}{z-1/2} + \frac{\alpha_2}{z+2} = \frac{\alpha_1(z+2)+\alpha_2(z-1/2)}{(z+2)(z-1/2)}$$

Imponendo l'uguaglianza dei numeratori per $z = 1/2$, $z = -2$:

$$\begin{cases} 5/2\,\alpha_1 = 1 \\ -5/2\,\alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2/5 \\ \alpha_2 = -2/5 \end{cases}$$

Pertanto:

$$Y(z) = \frac{2}{5}\frac{z}{z-1/2} - \frac{2}{5}\frac{z}{z+2}$$

Antitrasformando:

$$y(k) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{2}{5}(-2)^k, \quad k \geq 0$$

4.3

```
G = 2*tf([1 -1],[2 3 -2],-1);
step(G)
```

4.4

La risposta in frequenza del sistema per $\vartheta = 1$ ha la seguente espressione:

$$G(e^j) = 2\frac{e^j - 1}{2e^{j2} + 3e^j - 2}$$