POLITECNICO
MILANO 1863

Fondamenti di Automatica

a.a. 2021-2022

Prof. Paolo Rocco

9 Giugno 2022 - Appello

SOLUZIONI

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico lineare invariante e a tempo continuo in forma di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + \alpha x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 - 3x_3 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Domanda 1.1 Si valuti per quali valori di α il sistema è asintoticamente stabile.

α :

La matrice $\mathbf{A}$ *del sistema è:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \alpha \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è quindi:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -\alpha \\ -1 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) - \alpha = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 - \alpha$$

L'applicazione del criterio di Routh al polinomio caratteristico porta alla condizione di asintotica stabilità: $-60 < \alpha < 6$

Domanda 1.2 Si spieghi perché la stabilità è proprietà strutturale per un sistema dinamico.

Sia $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ *un cambiamento di variabili di stato. Allora* $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ *è la nuova matrice dinamica del sistema, che è in relazione di similitudine con la matrice dinamica originaria e quindi ha gli stessi autovalori. Poiché la stabilità dipende solo dagli autovalori di* $\mathbf{A}$*, la stabilità è proprietà strutturale, cioé indipendente dalla scelta delle variabili di stato.*

Domanda 1.3 Si valuti per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è completamente raggiungibile.

α :

Risulta:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità assume l'espressione:

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Poiché risulta $\det(\mathbf{K}_r) = -\alpha$ *il sistema risulta completamente raggiungibile per tutti i valori di* α *diversi da 0.*

Domanda 1.4 Si valuti per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è completamente osservabile. Alla luce anche del punto precedente, senza calcolarne l'espressione, si spieghi per quali valori di α il denominatore della funzione di trasferimento del sistema ha grado 3.

α :

Risulta:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

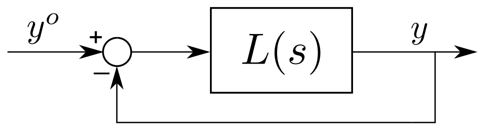
La matrice di osservabilità assume l'espressione:

$$\mathbf{K}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & \mathbf{A}^{T^2}\mathbf{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Poiché risulta $\det(\mathbf{K}_o) = \alpha$ *il sistema è completamente osservabile per tutti i valori di* α *diversi da 0. Per tali valori il sistema è quindi raggiungibile e osservabile, per cui il denominatore della funzione di trasferimento avrà grado pari all'ordine del sistema, ossia grado 3.*

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema di controllo, con y variabile controllata e y^o riferimento, in cui:



$$L(s) = \frac{\mu}{s(1-0.2s)^2}$$

Domanda 2.1 Si tracci il luogo delle radici diretto.

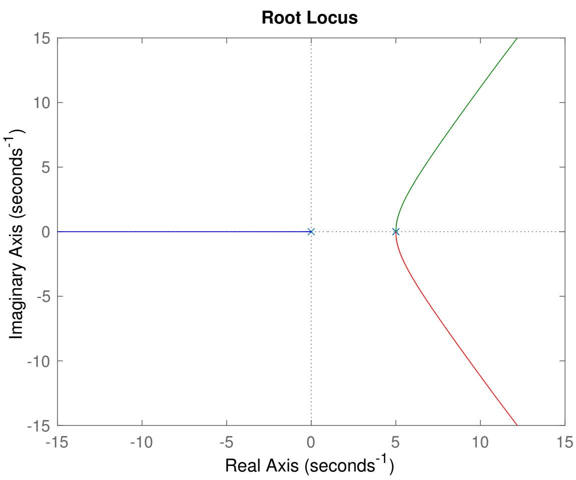
Riscrivendo $L(s)$ nella forma con costante di trasferimento $\rho = 25\mu$, poli e zeri:

$$L(s) = \frac{\rho}{s(s-5)^2}$$

si osserva che $L(s)$ possiede un polo nell'origine e due poli in 5, quindi $n = 3$, $m = 0$. Il luogo delle radici diretto presenta quindi $n = 3$ rami e $n - m = 3$ asintoti che si incontrano in $x_a = \frac{5+5+0}{3} = \frac{10}{3}$ Gli angoli che gli asintoti formano con l'asse reale sono:

$$\theta = \frac{180^o + h360^o}{n-m} = \frac{180^o + h360^o}{3} = \begin{cases} 60^o, & h = 0 \\ 180^o, & h = 1 \\ 300^o, & h = 2 \end{cases}$$

I punti dell'asse reale che appartengono al luogo diretto sono quelli tra $-\infty$ e 0. Pertanto il luogo delle radici diretto risulta il seguente:

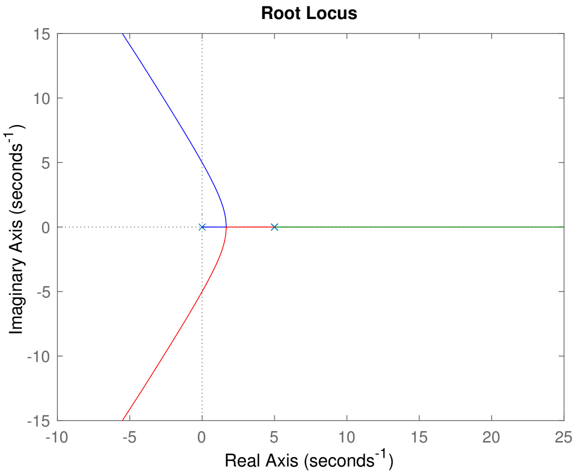


Domanda 2.2 Si tracci il luogo delle radici inverso.

Il luogo delle radici inverso presenta $n = 3$ rami e $n - m = 3$ asintoti che si incontrano in $x_a = \frac{10}{3}$. Gli angoli che essi formano con il semiasse reale positivo sono:

$$\theta = \frac{h360^o}{n-m} = \frac{h360^o}{3} = \begin{cases} 0^o, & h = 0 \\ 120^o, & h = 1 \\ 240^o, & h = 2 \end{cases}$$

I punti dell'asse reale che appartengono al luogo inverso sono quelli tra 0 e ∞. Pertanto il luogo delle radici inverso risulta il seguente:



Domanda 2.3 Sulla base dei luoghi tracciati, si determini il valore del guadagno $\mu = \bar{\mu}$ per cui il sistema in anello chiuso ha due poli con parte reale -1.

$\bar{\mu} =$

Il sistema in anello chiuso può avere due poli a parte reale -1 solo nel caso di luogo inverso. I due poli, inoltre, risultano complessi coniugati.
Poiché la parte immaginaria dei poli non è nota, non è possibile applicare la regola della punteggiatura ai poli complessi coniugati. Dunque si utilizza dapprima la regola del baricentro (valida poiché la differenza tra il numero di poli e il numero di zeri è 3) per ricavare la posizione del polo reale corrispondente al medesimo valore di $\bar{\mu}$. In secondo luogo si applica la regola della punteggiatura nel punto trovato.
Dal momento che la somma delle parti reali dei poli in anello chiuso si conserva e vale 10, quando due poli hanno parte reale -1, il terzo ha parte reale 12. Applicando quindi la regola della punteggiatura al punto appena trovato ($\bar{s} = 12$), e ricordando che appartiene al luogo inverso, si ricava il valore della costante di trasferimento:

$$|\bar{\rho}| = \frac{|12+0| \cdot |12-5|^2}{1} \rightarrow \bar{\rho} = -588$$

Da cui infine si ricava $\bar{\mu} = -23.52$.

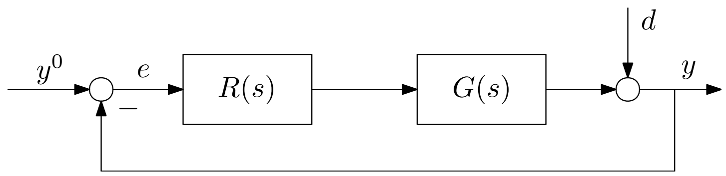
Domanda 2.4 Sulla base dei luoghi tracciati, si determinino i valori di μ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

$\mu :$

Il sistema in anello chiuso non è mai asintoticamente stabile, avendo sempre almeno un polo nel semipiano destro.

Esercizio 3

Si consideri il sistema di controllo schematizzato nella seguente figura dove



$$G(s) = 100 \cdot \frac{1 - 0.03s}{s+1}$$

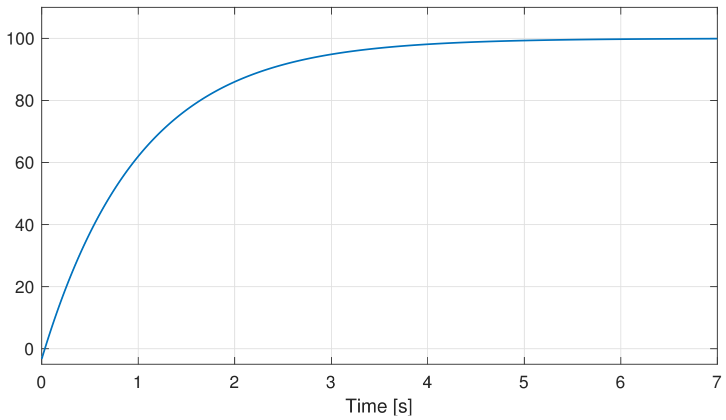
Domanda 3.1 Tracciare la risposta qualitativa del sistema da controllare, $G(s)$, ad uno scalino della variabile di ingresso $u = \text{sca}(t)$.

La funzione di trasferimento $G(s)$ appartiene alla classe:

$$G(s) = \mu \cdot \frac{1 + s\tau}{1 + sT}$$

con $\mu = 100$, $\tau = -0.03$ e $T = 1$.

La risposta allo scalino parte quindi dal valore iniziale $y(0) = \mu \cdot \dfrac{\tau}{T} = -3$, tende al valore finale $y_\infty = \mu = 100$, con costante di tempo $T = 1$:



Domanda 3.2 Si progetti un regolatore in modo da soddisfare le seguenti specifiche di progetto:

1. l'errore a transitorio esaurito sia $e_\infty = 0$ quando $y^\circ = \text{sca}(t)$
2. il disturbo $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, con $\bar{\omega} \leq 0.3$ rad/s, sia attenuato a regime, sull'uscita y, di un fattore almeno pari a 10
3. il margine di fase sia $\varphi_m \geq 70°$
4. la pulsazione critica sia $\omega_c \geq 1$ rad/s

A conclusione del progetto, si riporti l'espressione del regolatore:

$$\boxed{R(s) = \quad\quad\quad\quad}$$

Progetto statico

La prima specifica richiede che il tipo della funzione d'anello sia $g_L \geq 1$ e quindi che il tipo del regolatore sia $g_R \geq 1$.

Scegliendo $g_R = 1$, il guadagno del regolatore μ_R è arbitrario e può essere fissato uguale a 1. Ne consegue che il progetto statico si può concludere con la funzione di trasferimento $R_1(s) = \dfrac{1}{s}$.

Attenuazione del disturbo

La specifica si traduce in un vincolo sul modulo della risposta in frequenza della funzione di trasferimento d'anello per pulsazioni inferiori a $0.3\,rad/s$:

$$|L(j\omega)|_{dB} \geq 20, \qquad \omega \leq 0.3$$

Questo vincolo si tradurrà in una zona proibita nel diagramma semilogaritmico, in cui il modulo di L non potrà entrare.

Progetto dinamico

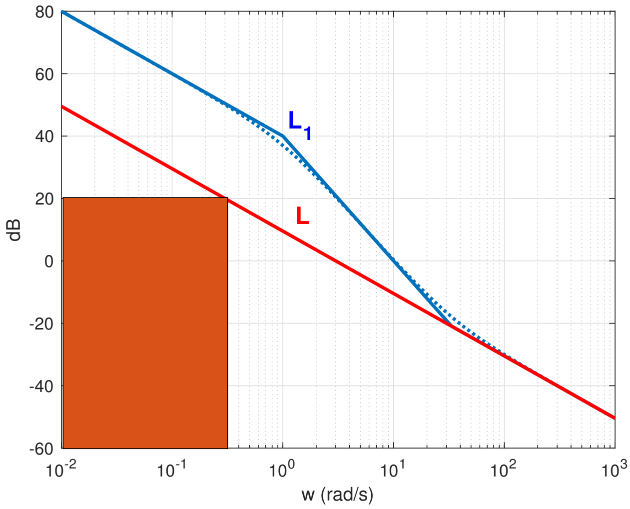
A valle del progetto statico possiamo costruire la funzione di trasferimento:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{100}{s} \cdot \frac{1 - 0.03s}{s + 1}$$

Tracciandone il diagramma di Bode del modulo ci si rende subito conto che il margine di fase è negativo o del tutto insufficiente.

Si provvede quindi al progetto del modulo di L facendo in modo che tagli l'asse a 0 dB alla pulsazione 3, lambendo quindi la zona proibita. In bassa frequenza non occorre raccordare il diagramma di $|L|$ con quello di $|L_1|$ non essendoci vincoli sul guadagno del regolatore che emergano dal progetto statico.

In alta frequenza occorre mantenere lo zero nel semipiano destro alla pulsazione 33 dove si può aggiungere un polo nel semipiano sinistro. La fase critica risulta:



$$\varphi_c = -90^\circ - 2\arctan\frac{3}{33} \approx -90^\circ - 2 \cdot 5^\circ = -100^\circ$$

e quindi il margine di fase è di circa 80°. Tutte le specifiche sono soddisfatte e la funzione di trasferimento d'anello assume l'espressione:

$$L(s) = \frac{3}{s} \cdot \frac{1 - 0.03s}{1 + 0.03s}$$

Ne consegue che la funzione di trasferimento del controllore è:

$$R(s) = R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{0.03}{s} \cdot \frac{1 + s}{1 + 0.03s}$$

Esercizio 4

Si consideri un sistema dinamico a tempo discreto descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{1}{(z+0.5)(z+\alpha)}$$

Domanda 4.1 Si determinino tipo e guadagno di $G(z)$ per qualsiasi valore reale di $\alpha \neq -1$.

Tipo:

Guadagno:

La funzione di tasferimento $G(z)$ presenta due poli in $z = -0.5$ e in $z = -\alpha$. Poiché per $\alpha \neq -1$ si ha che $G(z)$ non presenta poli o zeri in $z = 1$ il tipo è $g = 0$. Il guadagno vale quindi:

$$G(1) = \frac{2}{3(1+\alpha)}$$

Domanda 4.2 Si indichi l'intervallo dei valori del parametro α per cui il sistema è asintoticamente stabile.

α :

Poiché il polo in $z = -0.5$ ha modulo minore di 1, il sistema è asintoticamente stabile per $-1 < \alpha < 1$, il che garantisce che anche l'altro polo abbia modulo minore di 1.

Domanda 4.3 Ponendo $\alpha = -\frac{1}{3}$, si determinino, facendo uso degli appositi teoremi, il valore iniziale e, se possibile, il valore finale della risposta di $G(z)$ allo scalino di ampiezza 2. Si verifichi che il valore finale sia coerente con i parametri ottenuti al punto 4.1.

$y(0) =$

$y(k \to \infty) =$

La risposta di $G(z)$ allo scalino di ampiezza 2 è data da

$$Y(z) = G(z)\frac{2z}{z-1} = \frac{2z}{(z-1)(z+0.5)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

Per il teorema del valore iniziale si ha che

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z) = 0$$

Poichè per $\alpha = -\frac{1}{3}$ il sistema è asintoticamente stabile, è possibile applicare il teorema del valore finale:

$$\lim_{z \to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z \to 1} 2 \cdot z \cdot G(z) = 2 \cdot G(1) = 2$$

Notando che per $\alpha = \frac{1}{3}$ il guadagno del sistema vale 1, il risultato trovato è coerente, poiché la risposta si assesta su un valore pari all'ampiezza dello scalino per il guadagno della funzione di trasferimento.

Domanda 4.4 Ponendo sempre $\alpha = -\frac{1}{3}$, si determinino i primi quattro campioni della risposta di $G(z)$ allo scalino di ampiezza 2.

$y(0) =$

$y(1) =$

$y(2) =$

$y(3) =$

Applicando il metodo della lunga divisione, i primi quattro campioni della risposta di $G(z)$ allo scalino di ampiezza 2 sono:

$$y(0) = 0,\ y(1) = 0,\ y(2) = 2,\ y(3) = \frac{5}{3}$$